Lycée du Parc 2011-2012

# Hypokhâgne B/L - Concours Blanc

## Épreuve de mathématiques

*Samedi 5 Mai 2012 - 08h-12h*

---


*Si la vie est complexe, c'est parce qu'elle a une partie réelle et une partie imaginaire.*
Marius Sophus Lie.

Le devoir comporte six exercices qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.
Le sujet est rédigé sur 4 pages.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

# Exercice 1

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$$

1. Calculer $u_1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente vers un réel $\ell$ vérifiant $\ell \leqslant 1$.
3. Déterminer une relation entre $u_n$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$ et montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

   Que peut-on en déduire ?
4. En effectuant une intégration par parties, établir l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$$

5. Montrer que pour tout $u$ réel positif, $\ln(1+u) \leqslant u$. En déduire que :

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)dx \leqslant \frac{1}{n+1}$$

6. Donner une valeur approchée de $1 - u_{10}$, puis de $u_{10}$ à $10^{-2}$ près.

# Exercice 2

1. À l'aide d'un changement de variable $u = x^2$, calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

2. À l'aide d'un changement de variable $x = \cos(t)$, calculer l'intégrale :

$$J = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$$

# Exercice 3

1. Soit $T$ une matrice triangulaire. Rappeler à quelle condition la matrice $T$ est inversible.
2. Soit $a$ un réel quelconque. Déterminer les valeurs de $a$ pour lesquelles la matrice $M = \begin{pmatrix} -a & -1 & -1 \\ -1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

# Exercice 4

On définit les polynômes $A$, $B$ et $C$ par :

$$A = (X+3)(X+5), \quad B = 2(X+1)(X+5), \quad C = 3(X+1)(X+3)$$

1. Montrer que les trois polynômes $A$, $B$ et $C$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On considère $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P(-1) = 0\}$.
   Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. (a) Démontrer que $(X+1, X^2-1)$ est une famille libre d'éléments de $E$.
   (b) En déduire une base et la dimension de $E$.
4. Démontrer que $(B, C)$ est une base de $E$.
5. Soit $F$ l'espace vectoriel engendré par le polynôme $A$. Démontrer que $F \cap E = \{0\}$.
   A-t-on $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus E$ ?

# Exercice 5

Soit $f$ la fonction définie, lorsque cela a un sens, par la relation suivante :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln(t)}$$

1. Montrer que $f(x)$ a un sens pour tout $x$ strictement positif.
2. Montrer que la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer sa dérivée $f'(x)$ pour $x > 0$.
3. Étudier les variations de la fonction $f$.
4. (a) Calculer, pour $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$.
   (b) Montrer que
   $$\lim_{t \to +\infty} t^{3/2} \left( \frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \right) = 0$$
   (c) Justifier qu'il existe un réel $A$ tel que pour tout $t > A$, on ait :
   $$t^{3/2} \left( \frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \right) \leqslant 1$$
   (d) En déduire que
   $$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \left( \frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \right) dt = 0$$
   (e) Montrer que $f$ admet une limite quand $x$ tend vers $+\infty$, et que cette limite est $\ln(2)$.
5. Montrer que $f$ admet pour limite 0 quand $x$ tend vers $0^+$, et en déduire que $f$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.
6. Déterminer la limite de $f'(x)$ lorsque $x \to 0^+$. La fonction $f$ (prolongée) est-elle dérivable en 0 ?
7. Donner l'allure de la représentation graphique de $f$, le plan étant rapporté à un repère orthonormé.

# Exercice 6

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, dont on notera le vecteur nul $\overrightarrow{0}$.
Soit $u$ un endomorphisme de $E$ qui vérifie :

$$\forall \overrightarrow{x} \in E,\ u^3(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$$

où $u^3$ désigne la composée $u \circ u \circ u$.

1. Peut-on avoir $\mathrm{Ker}(u) = \{\overrightarrow{0}\}$ ? Déterminer $\mathrm{Ker}(u^3)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Ker}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u^3)$.
3. Montrer que si on a $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$, alors $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^3)$.
4. On suppose dans cette question que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$. On souhaite prouver que $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 2$.
   (a) Montrer que si $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 1$, alors on a $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$. En déduire que ce cas est exclu.
   (b) Montrer que si $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 3$, alors $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. En déduire que ce cas est exclu.
   (c) Conclure.
5. Montrer que si $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2$, alors $u^2$ est l'endomorphisme nul.
6. On suppose dans cette question que $u^2$ n'est pas l'endomorphisme nul.
   (a) Calculer $\dim(\mathrm{Im}(u))$ et $\dim(\mathrm{Im}(u^2))$.
   (b) Soit $\overrightarrow{x_0} \in E$ tel que $u^2(\overrightarrow{x_0}) \neq \overrightarrow{0}$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{x_0}, u(\overrightarrow{x_0}), u^2(\overrightarrow{x_0}))$ est une base de $E$.