Le devoir comporte quatre exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 1 page.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Les résultats énoncés dans le sujet non démontrés par le candidat pourront être admis et librement utilisés dans les questions suivantes.

Exercice 1

Soient E, F, G, trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et soit $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{\overrightarrow{0}_F\}$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g) \iff \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f) = F$

Exercice 2

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite :

$$u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{1/\tan(e^{-n})}$$

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto x^3 + 3x - n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note u_n cette solution.
   Justifier que $0 \leqslant u_n \leqslant n^{1/3}$
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\left(\frac{u_n}{n^{1/3}}\right)^3 = 1 - 3\frac{u_n}{n}$$
   et en déduire que
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1/3}$$
3. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(u_n)$ et en déduire que la suite (u_n) est strictement croissante. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 4

On définit une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par

$$\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \quad (*) \end{cases}$$

Indication générale : la relation $(*)$ sert énormément dans tout l'exercice, parfois plusieurs fois de suite dans une même question.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
3. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} \leqslant \frac{1}{2}(1+x)$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant n + \frac{u_0}{2^n}$, puis que la suite $\left(\frac{u_{n-1}}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.
   (c) Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. En déduire qu'il en est de même pour la suite $\left(\frac{u_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 1}$.
   (d) Encadrer la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ et montrer qu'elle converge. Quelle est sa limite ?
4. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n - \sqrt{n}$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite ℓ que l'on précisera.

$* * *$ *Fin du sujet* $* * *$