Le devoir comporte quatre problèmes indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 3 pages.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Les résultats énoncés dans le sujet non démontrés par le candidat pourront être admis et librement utilisés dans les questions suivantes.

Problème 1

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre les trois systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (on écrira l'ensemble de solutions sous la forme d'un Vect lorsque cela est possible) :

   (a) $(S_1) : \begin{cases} 3x - 2y + 3z &= x \\ x + 2z &= y \\ 2z &= z \end{cases}$

   (b) $(S_2) : \begin{cases} 3x - 2y + 3z &= 2x \\ x + 2z &= 2y \\ 2z &= 2z \end{cases}$

   (c) $(S_3) : \begin{cases} 3x - 2y + 3z &= 2x + 2 \\ x + 2z &= 2y + 1 \\ 2z &= 2z \end{cases}$

2. Montrer que la matrice P est inversible, calculer son inverse, puis vérifier que $A = PTP^{-1}$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel α_n tel que

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

   et déterminer une relation de récurrence établie par la suite (α_n).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = n2^{n-1}$
5. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PT^nP^{-1}$.
   (On ne demande pas d'écrire explicitement la matrice A^n)
6. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. Montrer que :

$$TM = MT \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} M \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \\ \text{où } a, b, c \text{ sont trois réels} \end{array} \right.$$

7. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit la matrice M' par $M' = P^{-1}MP$.

   (a) Exprimer M en fonction de M', P et P^{-1}.
   En utilisant l'égalité précédente et l'égalité $A = PTP^{-1}$, montrer que :

$$AM = MA \Longleftrightarrow TM' = M'T$$

   (b) En déduire que M vérifie $AM = MA$ si et seulement s'il existe des réels a, b, c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

   (c) En déduire que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une famille génératrice.

Problème 2

Lorsque f est une fonction bijective, elle admet une fonction réciproque f^{-1}. Lorsque f est une fonction qui ne s'annule pas, on peut également définir sa fonction inverse $\dfrac{1}{f}$.
Il ne faut pas confondre les deux : a priori, il n'y a aucune raison pour que $f^{-1} = \dfrac{1}{f}$: ce sont deux applications différentes.
Le but de ce problème est de voir que dans le cas de la fonction $f = \tan$, il existe une valeur positive en laquelle la fonction réciproque et la fonction inverse coïncident.

Partie A

On introduit la fonction g définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$g(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\text{Arctan}(x)}\right)$$

1. Justifier que g est une fonction continue et dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Démontrer que la fonction g se prolonge par continuité en 0.
   On notera encore g la fonction ainsi prolongée.
   Préciser la valeur de $g(0)$.
3. (a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (b) Quelle est la limite de $g'(x)$ lorsque $x \to 0^+$?
   La fonction g est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $g'(0)$?
   (c) Déterminer le sens de variations de g sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
   (d) Justifier que :
   $$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad |g'(x)| < 1$$
4. On pose, pour tout x pour lequel cette expression a un sens :
   $$h(x) = (g \circ g)(x) - x$$
   et l'on donne $h(0) = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \simeq 0.8$ et $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \simeq -0.6$.
   (a) Justifier que $g\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right) \subset \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. En déduire que la fonction h est bien définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
   (b) Exprimer h' à l'aide de g et g' et en déduire en utilisant la question 3.(d), que h est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   (c) En déduire que la fonction h s'annule une unique fois sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   On a ainsi démontré que la fonction $g \circ g$ admet un unique point fixe dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Partie B

On considère l'équation (E) définie par :

$$(E) : \qquad \text{Arctan}(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

et l'on introduit la fonction φ définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\varphi(x) = \text{Arctan}(x) - \frac{1}{\tan(x)}$$

5. (a) À l'aide de la fonction φ, démontrer que l'équation (E) admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
   (b) Sachant que $\varphi(0.9) \simeq -0.06$ et $\varphi(1) \simeq 0.14$, quel encadrement obtient-on sur α ?
6. (a) Démontrer que, pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :
   $$\varphi(x) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = x$$
   (b) En déduire que le nombre α est l'unique point fixe de g sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$
   (c) Calculer $(g \circ g)(\alpha)$ et en déduire que α est également l'unique point fixe de $g \circ g$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Problème 3

1. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 3y + 2z = 0\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
2. On pose $\overrightarrow{w_1} = (1, 1, 2)$ et $\overrightarrow{w_2} = (1, -1, 1)$. Pour quelle valeur du réel a, le vecteur $\overrightarrow{w} = (-a, 5, a)$ est-il combinaison linéaire de $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$? Expliciter alors toutes les décompositions possibles.
3. Soit $F = \{(a + b - c, a - b + 5c, 2a + b + c), \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
4. On note $G = E \cap F$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.

Problème 4

Soit E l'espace vectoriel des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ et qui sont deux-fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
On note F l'ensemble des éléments f de E tels que $f'' - 3f' + 2f = 0$.
On note F_0 l'ensemble des éléments de F qui vérifient de plus les relations $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   On admettra que F_0 est également un sous-espace vect. de E.
2. Soit f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :
   $$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{2x}$$
   Montrer que f_1 et f_2 sont des éléments de F et que (f_1, f_2) forme une famille libre.
3. Soit f une fonction appartenant à l'ensemble F.
   (a) Montrer qu'il existe un unique couple (a_1, a_2) de nombres réels tel que $f - a_1 f_1 - a_2 f_2$ appartienne à F_0.
   (b) Soient g_1 et g_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :
   $$g_1(x) = e^{-x}(f'(x) - 2f(x)), \quad \text{et} \quad g_2(x) = e^{-2x}(f'(x) - f(x))$$
   Montrer que ces fonctions sont constantes.
   (c) En appliquant le résultat précédent, montrer que si f appartient à F_0, alors $f = 0$.

$* * *$ *Fin du sujet* $* * *$