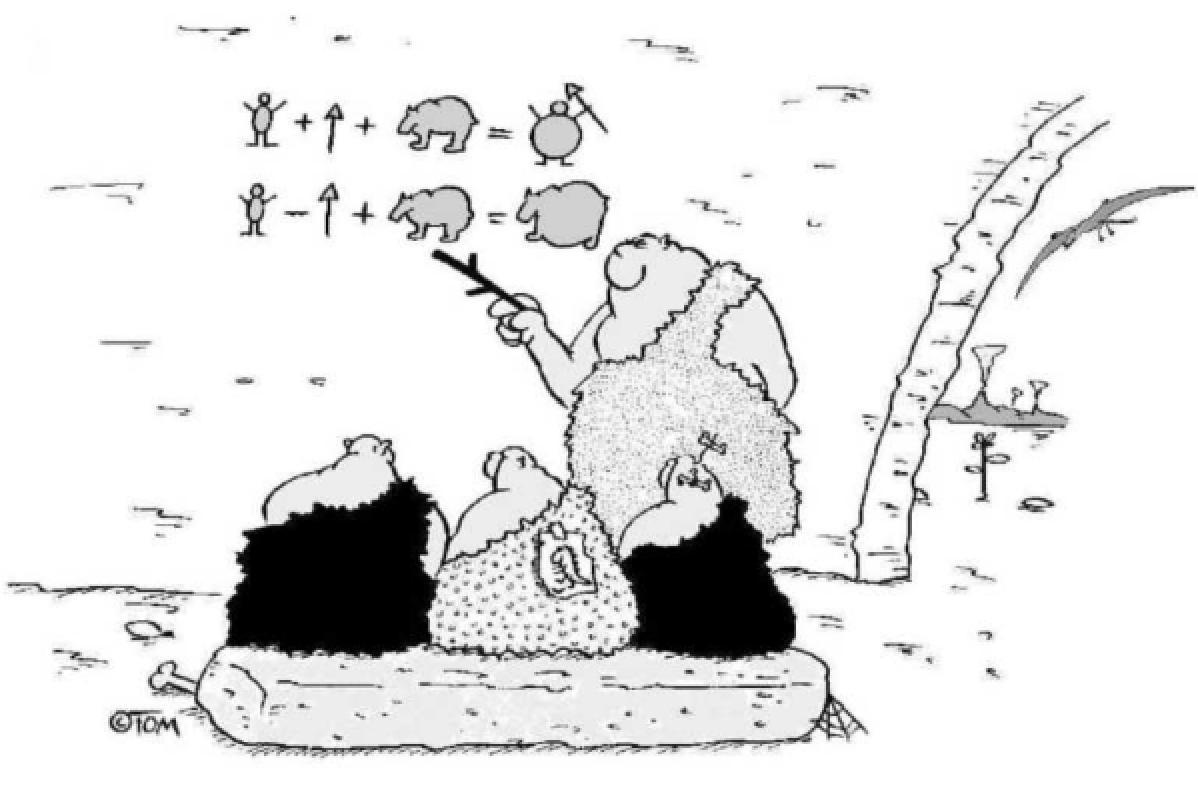
Hypokhâgne B/L - Concours Blanc

Épreuve de mathématiques

Mardi 13 Décembre 2011 - 08h-12h



En essayant continuellement, on finit par réussir,
Donc plus ça rate, plus on a de chances que ça marche.
Les Shadocks.

Le devoir comporte trois exercices et trois problèmes qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.
Le sujet est rédigé sur 4 pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Exercice 1

Soit E un ensemble et soit $f : E \longrightarrow E$ une application, qui vérifie :

$$f \circ f = f$$

Prouver que si f est injective ou surjective, alors on a : $\forall x \in E,\ f(x) = x$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[, \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$ et $+\infty$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$$

1. Etudier les variations de la fonction f. Dresser son tableau de variations en précisant les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ dans un intervalle J à préciser.

   On note alors $g : J \to \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ la fonction réciproque de f. Dresser le tableau de variations de g.
3. On donne : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \simeq 0.8578$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que l'équation

   $$f(x) = \frac{1}{n}$$

   admet une unique solution dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, que l'on notera u_n.
4. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$.

Problème 1

On considère les polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ définis par :

$$P(X) = 2X^3 + (6+3i)X^2 + (2+9i)X + 6$$

et

$$Q(X) = 2X^4 + (2-3i)X^3 + (4-3i)X^2 + (2-3i)X + 2$$

1. (a) Le polynôme P admet deux racines imaginaires pures. Déterminer ces racines.
   (b) En déduire la factorisation de P en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
2. (a) Démontrer que l'équation $Q(z) = 0$ est équivalente à l'équation :
   $$2z^2 + (2-3i)z + (4-3i) + (2-3i)\frac{1}{z} + 2\frac{1}{z^2} = 0$$
   (b) Résoudre cette dernière équation à l'aide du changement d'inconnue $Z = z + \dfrac{1}{z}$
   (c) En déduire la factorisation de Q en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
3. Démontrer que le polynôme PQ est à coefficients réels et déterminer sa factorisation en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Problème 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$.

1. Calculer $\operatorname{Arctan}(1)$.
2. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f et justifier que f est continue sur cet ensemble de définition.
   (b) Démontrer que f se prolonge par continuité en -1.
   Dans la suite, on notera encore f la fonction "prolongée" obtenue. Préciser la valeur de $f(-1)$.
3. (a) Sur quel ensemble peut-on dériver f sans souci particulier ? Démontrer que pour tout x de cet ensemble, on a :
   $$f'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$
   (b) La fonction f est-elle dérivable en -1 et/ou en 1 ?
   Que peut-on préciser graphiquement en ces points ?
   (c) Dresser le tableau de variations de f, limites comprises.
4. Représenter la courbe de f.
   (Unité graphique : 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).
5. On considère la fonction g définie par
   $$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   (b) Démontrer que g se prolonge par continuité en 0.
   Dans la suite, on notera encore g la fonction "prolongée" obtenue. Préciser la valeur de $g(0)$.
   (c) Calculer g' lorsque cela est possible. On précisera bien ce qui se passe aux éventuels points d'incertitude.
   (d) En déduire que g est une fonction usuelle sur $[-1, 1]$ que l'on précisera. La représenter.

Problème 3

On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-xf(x)}$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$
3. Soit a un réel strictement positif fixé.
   (a) Justifier que $\forall x \in [a, +\infty[,\ f(x) \geqslant f(a) > 0$.
   En déduire que si f admet une limite finie ℓ en $+\infty$, alors $\ell > 0$.
   (b) Montrer que $\forall x \in [a, +\infty[,\ f'(x) \leqslant e^{-xf(a)}$.
   En déduire, en la calculant, que f' admet une limite finie en $+\infty$.
   (c) Montrer que
   $$\frac{f'(x)}{f(x)} + f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x)$$
4. Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction g définie sur $[a, +\infty[$ par
   $$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} + f(x)$$
   (a) Justifier que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = -(f(x) + xf'(x))f'(x)$$
   où f'' désigne la dérivée de f'.
   (b) En déduire que la fonction g est décroissante sur $[a, +\infty[$, puis que la fonction g admet une limite finie en $+\infty$ que l'on désignera par λ.
5. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$.
6. On considère la fonction h définie sur $[a, +\infty[$ par
   $$h(x) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda x})$$
   (a) Montrer que $\forall x \in [a, +\infty[,\ f(x) \geqslant h(x)$.
   (b) En déduire que $\lambda \geqslant 1$.