Le devoir comporte trois exercices et deux problèmes indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 3 pages.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Les résultats énoncés dans le sujet non démontrés par le candidat pourront être admis et librement utilisés dans les questions suivantes.

Exercice 1

On cherche à résoudre l'équation suivante :

$$(E): \quad x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$$

1. Préciser le domaine de résolution de (E).
2. Montrer que résoudre (E) est équivalent à résoudre l'équation :

$$\ln(x)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) = 0$$

3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 2

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -3x^2 + 4x + 1$$

Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{2}{3}$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ g(x) = \frac{x-4}{x-2}$$

Montrer que la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de g est symétrique par rapport au point A de coordonnées $(2, 1)$.

Exercice 3

Calculer les limites suivantes : (on admettra que les expressions considérées existent au voisinage des points d'étude) :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x-4}{3x-2}\right)^{\sqrt{x}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x}e^{\frac{1}{x}}\right)$
4. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+6}}{x+8}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x}}$

Problème 1

1. (a) Dresser le tableau de variations de la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par :
$$h(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$
   (b) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$,
$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$
   (c) En déduire que,
$$\ln(1+x) - x \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-x^2}{2}$$
   (On admettra dans la suite que cet équivalent est également valable lorsque $x \to 0^-$, autrement dit que
$$\ln(1+x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$$

2. On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = e \end{cases}$$
   (a) Montrer que f est continue en 0.
   (b) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en -1 ?
   (c) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
   (d) Donner un équivalent de $\frac{1}{x}\ln(1+x) - 1$ lorsque $x \to 0$.
   En déduire que f est dérivable en 0 et montrer que $f'(0) = -\frac{e}{2}$
   (e) La courbe de f admet-elle une tangente au point d'abscisse 0 ? Si oui, préciser son équation.
   (f) Montrer que f est dérivable sur $]-1,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
   (g) Montrer que, pour $x \neq 0$, $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme
$$f'(x) = \frac{1}{x^2} f(x) g(x)$$
   où g est une fonction à préciser.
   (h) Étudier les variations de g, et en déduire les variations de f.
   (i) Étudier les branches infinies de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.
   (j) Placer dans un repère les différents résultats obtenus dans le problème (points, tangentes, asymptotes, ...) et donner alors l'allure de la courbe de f dans ce repère.

Problème 2

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$ que l'on fixe pour tout l'exercice.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) = \ln(b) + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^x}{2}\right)$$

(b) En utilisant l'équivalent en 0 de $e^x - 1$, déterminer un équivalent de $\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1$.

(c) Écrire le terme $\dfrac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^x}{2}$ sous la forme $1 + \varphi(x)$ avec φ une fonction vérifiant $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$.

En déduire un équivalent de $\ln\left(\dfrac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^x}{2}\right)$, puis un équivalent de $\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^x}{2}\right)$.

(d) Déterminer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^x}{2}\right)$$

(e) En déduire la limite de f en 0. Justifier qu'on peut donc prolonger par continuité la fonction f.

On pourra admettre dans toute la suite du problème que f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier en considérant ce prolongement.

2. (a) Déterminer :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+\left(\frac{a}{b}\right)^x}{2}\right)$$

(b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
On pourra admettre que, par un raisonnement similaire, on a :

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = a$$

3. Il est rappelé le résultat suivant, que l'on pourra utiliser librement : *"Si une fonction f est continue sur un segment $[a, b]$, alors la fonction f est bornée sur ce segment."*

(a) Montrer que l'on peut trouver :
- un $B > 0$ tel que $\forall x > B$, $f(x) \leqslant b + 1$.
- un $A < 0$ tel que $\forall x < A$, $f(x) \geqslant a + 1$.

(b) Montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

$* * *$ *Fin du sujet* $* * *$