Le devoir comporte des questions d'applications du cours et deux exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 2 pages.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Les résultats énoncés dans le sujet non démontrés par le candidat pourront être admis et librement utilisés dans les questions suivantes.

Questions de cours

1. (a) Soit x un réel quelconque et soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} x^k$?
   Enoncer le résultat et le démontrer.
   (b) Soit x un réel quelconque et soit $n \in \mathbb{N}$.
   Calculer la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$.
2. (a) Donner la définition d'une suite minorée.
   (b) Donner la définition d'une suite croissante.
   (c) Soit (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   Est-elle croissante ? minorée ?

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1, \quad u_2 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \geqslant 1,\ u_{n+2} = \dfrac{2}{3}u_{n+1} + \dfrac{1}{3}u_n - 2 \end{cases}$$

On considère la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

1. Soit $n \geqslant 1$. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$ en fonction de u_1 et de u_{n+1}
2. (a) Calculer v_1
   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{3}v_n - 2$.
   (c) Quel type de suite reconnaît-on pour (v_n) ?
   En déduire alors que la suite (v_n) vérifie la relation :
   $$\forall n \geqslant 1,\ v_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{3}{2}$$
   (d) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{3n}{2} + \frac{3}{4}$$
3. (a) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{3n}{2} + \frac{7}{4}$$
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 2

On rappelle que la notation

$$\sum_{j=0}^{n} v_j$$

signifie

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} + v_n,$$

ceci même si l'expression des v_j est compliquée.

On admettra, sans avoir besoin de le démontrer, que lorsqu'on a deux sigma l'un dans l'autre comme dans ce qui suit, on peut les écrire indifféremment des deux façons suivantes :

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n} a_k\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} a_k\right)$$

On regardera en particulier les différentes lettres qui apparaissent dans les sigma des deux formules, ainsi que les différences au niveau des bornes d'en haut et d'en bas.

Dans tout cet exercice, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} 2^k\right) \qquad (1)$$

D'après ce qu'on a dit précédemment, on a donc également :

$$u_n = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n} 2^k\right) \qquad (2)$$

On pourra donc utiliser librement au choix dans l'exercice la formule (1) ou (2) pour parler de u_n.

1. (a) Soient p et q deux entiers tels que $p \leqslant q$. Montrer que :

$$\sum_{k=p}^{q} 2^k = 2^{q+1} - 2^p$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = n2^{n+1} + 1$$

2. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$$

3. (a) En utilisant les questions précédentes, calculer :

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k\right)$$

   (b) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)2^k$

   (c) Que vaut la somme $\sum_{k=0}^{n} k^2 2^k$?

$* * **$ *Fin du sujet* $* * **$