Exercice 1

1. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que l'intégrale :
$$I = \int_0^{+\infty} e^{-at} dt$$
converge.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^{+}$. Montrer que l'intégrale :
$$J_x = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}$$
converge.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+}, \forall t \in \mathbb{R}^{+},\ 2\sqrt{xe^t} \leqslant x + e^t$, puis que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ 0 \leqslant J_x \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Exercice 2

1. (a) Montrer que pour tout réel x, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente.
   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente si et seulement si le réel x est strictement positif.
   (c) En déduire que la fonction Gamma, Γ, définie par
   $$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$
   a pour domaine de définition $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Etablir, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante :
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$
3. (a) Calculer $\Gamma(1)$
   (b) Montrer que : $\forall n \geqslant 1,\ \Gamma(n) = (n-1)!$.