Exercice

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ données par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note Id l'endomorphisme Identité de $\mathbb{R}^3$, f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A, et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice B.

1. Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Montrer que :
$$\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(g) \Longleftrightarrow -x + y + z = 0$$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(Id - f)$
3. On note $\overrightarrow{u_1} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{u_3} = (0, -1, 1)$.
   (a) Calculer les images de $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ par l'application f.
   (b) Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Donner la matrice C de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}'$.
   Expliciter P et calculer son inverse P^{-1}.
   Donner puis vérifier la relation liant A, C, P et P^{-1}.