Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = \begin{cases} x^2 \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ lorsque c'est possible.
   Dresser le tableau de variations de f.
2. Pour $y > 0$, on pose $g(y) = f\left(\dfrac{1}{y}\right) - \dfrac{1}{y}$. Effectuer un développement limité à l'ordre 1 de g lorsque y tend vers 0^+.
   Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$?
3. Tracer l'allure de la courbe représentative de f à l'aide des informations déterminées aux questions précédentes.

Exercice 2

Donner les matrices des applications linéaires suivantes par rapport aux bases canoniques :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y, x+y, x) \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,z,y) \end{array}$.
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$.