Exercice

Soit F la fonction réelle définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in]0,1[,\ F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}, \qquad F(0) = 0, \qquad F(1) = \ln(2).$$

1. Justifier que F est bien définie sur l'intervalle $[0,1]$
2. (a) Pour tout x élément de $]0,1[$, vérifier que
$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln(t)} = \ln(2)$$
   (b) Montrer que pour tout x de $]0,1[$, on a :
$$x^2\ln(2) \leqslant F(x) \leqslant x\ln(2)$$
   (c) En déduire que F est continue sur $[0,1]$.
3. (a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et calculer $F'(x)$ pour tout x de $]0,1[$.
   (b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
4. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par :
$$\forall x \in]0,1[,\ g(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}, \qquad g(0) = 0, \qquad g(1) = 1.$$
   (a) Justifier l'existence de l'intégrale $I = \int_0^1 g(x)dx$
   (b) Calculer I.