Exercice

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ les intégrales de Wallis :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)dt \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$$

1. À l'aide d'un changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - t$, montrer que $\forall n \geqslant 0,\ I_n = J_n$.
2. On étudier désormais la suite (I_n).
   (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante et strictement positive. Que peut-on en déduire sur la nature de la suite ?

   (b) En écrivant $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(t)\sin(t)dt$, montrer que :
   $$\forall n \geqslant 2,\ nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

   (c) Calculer I_0 et I_1 et en déduire une expression de I_n pour tout n (séparer les cas où n pair et n impair).

   (d) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, le produit nI_nI_{n-1} est indépendant de n. Donnez sa valeur.

   (e) En déduire la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.