Exercice

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{5}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$$

1. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

   (b) Montrer que pour tout entier n, on a $(u_{n+1})^2 \leqslant (u_n)^2$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

   (c) Montrer que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

2. On définit les suites (S_n) et (T_n) par :

$$\begin{cases} S_0 = \dfrac{3}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = \dfrac{S_n}{u_{n+1}} \end{cases}$$

   et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \frac{S_n}{u_n}$$

   (a) Montrer que pour tout entier n, $S_n > 0$.

   (b) Montrer que (S_n) est décroissante.

   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{T_{n+1}}{T_n} = \dfrac{2u_n}{1+u_n}$. En déduire que le sens de variations de (T_n).

3. (a) Montrer que pour tout entier n, $\dfrac{3}{5} \leqslant T_n \leqslant S_n \leqslant \dfrac{3}{4}$.

   (b) En déduire que (S_n) et (T_n) sont adjacentes.