Exercice 1

1. Soit le polynôme P_n défini par

$$P_n(X) = X^n + X^{n-1} + \cdots + X^2 + X - 1$$

   Montrer pour tout $n \geqslant 2$, que P_n possède une racine et une seule a_n dans l'intervalle $]0,1[$.
2. Calculer a_2.
3. Montrer que $P_n(a_{n+1}) < 0$, puis en déduire que la suite $(a_n)_{n \geqslant 2}$ est décroissante et convergente.
4. Déterminer la limite de la suite (a_n).

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{x-1}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ dont une et une seule qui est élément de l'intervalle $[0,1]$.
   On désigne par x_0, la solution de l'intervalle $[0,1]$.
2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$
   (b) Déterminer la (les) limite(s) éventuelle(s) de la suite (u_n).
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - x_0| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - x_0|$
   (d) En déduire la convergence et la limite de la suite (u_n).