Exercice : Démonstration du Théorème 7 (Ch.14)

Soient α et β deux réels fixés. On note

$$E = \{(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n\}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. On pose l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\geqslant 0} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$.
   (a) Montrer que φ est linéaire et bijective.
   (b) En déduire la dimension de l'espace vectoriel E.
3. Soit $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 0$ et de premier terme 1. Montrer que

$$(q^n)_{n\geqslant 0} \in E \Longleftrightarrow q^2 = \alpha q + \beta$$

On note $(*)$ l'équation : $\boxed{x^2 = \alpha x + \beta}$.

4. On suppose que $(*)$ admette deux racines distinctes réelles q_1 et q_2.
   (a) Montrer que $\left((q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ forme une base de E.
   (b) En déduire la forme de toute suite étant dans E dans ce cas.
5. On suppose que $(*)$ admette une unique racine q_0.
   (a) Montrer que la suite $(n(q_0)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E.
   (b) Montrer que $\left((q_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n(q_0)^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ forme une base de E.
   (c) En déduire la forme de toute suite étant dans E dans ce cas.
6. On suppose que $(*)$ admette deux racines complexes conjuguées $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = re^{-i\theta}$ (avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$).

   On suppose qu'on a déterminé deux réels λ et μ tels que $r^0(\lambda\cos(0) + \mu\sin(0)) = u_0$ et $r^1(\lambda\cos(\theta) + \mu\sin(\theta)) = u_1$.
   Montrer à l'aide d'une récurrence double que la propriété :

$$\mathcal{P}(n) \ : \text{"}u_n = r^n(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))\text{"}$$

   est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.