Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On appelle *projecteur de E* tout endomorphisme f de E qui vérifie

$$f \circ f = f$$

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(p) = \{\overrightarrow{x} \in E \ / \ p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x}\}$

2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

3. On pose $q = Id_E - p$.
   (a) Montrer que q est également un projecteur de E.
   (b) Déterminer $\mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(q)$ en fonction de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$.

4. Soit u un endomorphisme de E quelconque. Montrer que :

$$p \circ u = u \circ p \iff \left| \begin{array}{l} \forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{Im}(p), \text{ on a } \ u(\overrightarrow{x}) \in \mathrm{Im}(p) \\ \text{et} \\ \forall \overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(p), \text{ on a } \ u(\overrightarrow{x}) \in \mathrm{Ker}(p) \end{array} \right.$$