Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On considère les ensembles F et G définis par : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - z = 0\}$ et $G = Vect\big((1,1,1)\big)$.

1. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer une base et la dimension de chacun d'eux.
3. Déterminer $F \cap G$. La somme $F + G$ est-elle directe ?
4. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2

On souhaite démontrer le résultat suivant :

Proposition.
Soit E un espace vectoriel.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) La somme $F + G$ est directe : on a $F \oplus G$, autrement dit :

$$\forall \overrightarrow{z} \in F + G, \quad \exists! (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F \times G \ / \ \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$$

(ii) Pour tout $\overrightarrow{x} \in F$ et pour tout $\overrightarrow{y} \in G$,

$$\text{si } \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0_E}, \qquad \text{alors } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0_E}$$

(iii) On a : $F \cap G = \{\overrightarrow{0_E}\}$

1. Montrer que si (i) est vérifiée, alors (ii) est vérifiée
2. Montrer que si (ii) est vérifiée, alors (iii) est vérifiée
3. Montrer que si (iii) est vérifiée, alors (i) est vérifiée

(On montre ainsi que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii) . . . et donc n'importe laquelle des trois propriétés entraîne n'importe quelle autre : elles sont toutes équivalentes).