Exercice

Le but de cet exercice est d'étudier une suite récurrente linéaire d'ordre 3 à l'aide de matrices. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$$

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose $J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

   On note $D = aI_3$ et $R = J(a,b) - D$.

   (a) Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, R^k et D^k.

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(J(a,b))^n$.

2. Pour $n \geqslant 3$, on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à déterminer.

   (b) Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 3,\ U_n = A^{n-2}U_2$.

3. (a) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible à l'aide du pivot de Gauss et déterminer la matrice P^{-1}.

   (b) Montrer que $A = PJ(1,-3)P^{-1}$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\left(J(1,3)\right)^n P^{-1}$.

   (c) Déduire des questions précédentes u_n en fonction de n.