Exercice

Pour tout réel a, on considère la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

On rappelle que I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3 :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $M(0)$.
2. Calculer $M(a) \times M(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer en utilisant la question 2 un réel $a_0 \neq 0$ tel que $[M(a_0)]^2 = M(a_0)$.
4. On note $P = M(a_0)$ et $Q = I - P$. Calculer PQ et QP.
5. Calculer P^2, Q^2 et en déduire les puissances successives de P et Q.
6. Soit a un réel. Trouver un réel x dépendant de a tel que

$$M(a) = P + xQ.$$

   Montrer alors que pour tout entier n, on a :

$$[M(a)]^n = P + x^n Q.$$