Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x + x$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter.
2. Montrer que pour tout entier positif n, l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera x_n.
3. Etudier la monotonie de la suite (x_n).

Exercice 2

On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution strictement positive, qu'on notera u_n.
2. Calculer u_1 et u_2 et vérifier que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$$
3. Montrer que $\forall x \in]0, 1[,\ f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. En déduire la monotonie de la suite (u_n).