Exercice

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

2. Montrer que la fonction f est continue en 0.
3. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Préciser $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
4. On admet que
   $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$$
   Que peut-on en déduire pour la fonction f en 0 ?
5. Etudier les limites de $f(x)$ lorsque $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$
6. (a) Etudier les variations de la fonction g définie par
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = xe^x - e^x + 1$$
   (b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x, puis dresser le tableau de variations de f (limites comprises).
7. Vérifier que
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = x + \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right)$$
   En déduire la nature de la branche infinie de f en $+\infty$.