Ce Devoir a pour but de retravailler les notions vues en terminale sur les fonctions (domaines de définition, limites usuelles, allures des courbes). N'hésitez pas à retourner voir vos cours de lycée pour vous aider, et retravailler les notions dont vous ne vous souvenez plus beaucoup.

Problème

Soit f la fonction définie sur l'ensemble $D_f = [0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$$

1. (a) Démontrer que : $\forall x \in D_f \setminus \{0\}$, on a $\dfrac{1}{x} \in D_f \setminus \{0\}$.
   En déduire que la fonction $x \longmapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est bien définie pour tout $x \in D_f \setminus \{0\}$.

   (b) Démontrer que :
   $$\forall x \in D_f \setminus \{0\},\ f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$
2. (a) Justifier que la fonction f est dérivable sur D_f.

   (b) Déduire de la question 1.(b) que :
   $$\forall x \in D_f \setminus \{0\}, \quad f'\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 f'(x)\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$$
   (c) On dit que α est un zéro de f' si on a $f'(\alpha) = 0$.
   Montrer que si α est un zéro non nul de f', alors $\dfrac{1}{\alpha}$ est aussi un zéro de f'.
3. Montrer que :
   $$\forall x \in D_f, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2-1)^2}\exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$$
   où g est une fonction polynôme que vous déterminerez.
4. (a) Montrer que pour tout $x \in D_f \setminus \{0\}$, on a :
   $$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = x^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x+\frac{1}{x}\right) - 4\right]$$
   (b) Résoudre dans D_f l'équation $f'(x) = 0$.
5. Calculer la limite de f en 1. En donner une interprétation graphique.
6. Soit u la fonction définie sur $D_f \setminus \{0\}$ par :
   $$u(x) = \frac{\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right) - 1}{\dfrac{2x}{x^2-1}}$$
   (a) Calculer la limite de u en $+\infty$.

   (b) Exprimer $f(x) - x$ en fonction de $u(x)$ et calculer la limite de $f(x) - x$ en $+\infty$.
   Donner une interprétation graphique du résultat.
7. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.