Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Exprimer la somme suivante en fonction de n :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1} 2^{3k+1}}{3^{k-1}}$$

Exercice 2

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par leurs premiers termes $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont strictement positifs.
2. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(v_{n+1})^2 - (u_{n+1})^2 = \frac{(v_n - u_n)^2}{4}$$

   (b) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$.
3. (a) Etudier le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).

   (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant 2$$