Devoir surveillé n°3

Durée : 4h

La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Vous devez donc faire des raisonnements clairs et complets. Prenez soin d'utiliser le langage mathématique avec précision et de rendre une copie propre. Évitez les ratures, les fautes d'orthographe et de grammaire. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que vous voulez en revanche l'ordre des questions au sein d'un exercice doit être respecté. Vous pouvez admettre un résultat et l'utiliser si vous n'arrivez pas à le démontrer.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Polynômes

Dans cet exercice on note $E = \mathbb{R}_4[x]$ et on s'intéresse aux ensembles suivants :

$$F = \{\delta x^4 + \gamma x^3 + \alpha x^2 + \gamma x + \delta,\ (\delta,\gamma,\alpha) \in \mathbb{R}^3\};$$

$$G=\{ \lambda x^3 + \mu x^2 + \mu x + \lambda,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\text{et } H =\{P\in E, P'(-1) = 0\}$$

1. Rappeler la base canonique de E.

2. Justifier que tous les éléments de G sont divisibles par le polynôme $x + 1$.

3. **Étude de F et G :**
   a) Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de E. En donner une base.
   b) Les espaces F et G sont-ils en somme directe ?
   c) A-t-on E = F⊕G

4. **Étude de H :**
   a) Justifier que H est stable par combinaison linéaire.
   b) Justifier que dim(H)≤ 4
   c) Montrer que la famille $(1,(x+1)^2,(x+1)^3,(x+1)^4)$ est une base de H.

5. **Étude de $G \cap H$:**
   a) Justifier que $1 \leq$dim(G∩H)≤ 2 puis montrer que dim(G∩H)$= 1$
   b) Montrer que toute fonction polynômiale de G∩H admet -1 comme racine multiple.
   c) En déduire une base de G∩H.

Exercice 2 : Matrices

Partie A :

On considère les matrices suivantes :

A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

et on note E = { aA+bB, $(a,b)\in \mathbb{R}^2$}

1. Montrer que E est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

2. a) Montrer que A^2, B^2, AB et BA sont dans E.
   b) En déduire que le produit de deux matrices de E reste dans E (on dit que E est stable par produit).

3. On pose C = A+B et D = A-2B.
   a) Exprimer A et B en tant que combinaison linéaire de C et D.
   b) Exprimer C^2, D^2, CD et DC en fonction de C et D.
   c) Exprimer aA+bB en fonction de C et D
   En déduire pour tout entier naturel n non nul et pour tout $(a,b)\in \mathbb{R}^2$; $(a\text{A}+b\text{B})^n$

Partie B :

On s'intéresse dans cette partie à l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A et on considère les vecteurs suivants : u = (1,1,0) ; v = (0,0,1) et w = (2,-2,1)

1. Montrer que u est une base de Ker(f)

2. Montrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Calculer f (v) et f (w).

4. Écrire D la matrice de f dans la base (u,v,w).

5. a) On note P = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   b) Vérifier que $P^{-1}AP = D$.
   c) En déduire pour tout entier naturel n, A^n.
   (en fonction de P et D)

Exercice 3 : Suite implicite (ENS 2019)

Soit $n \geq 2$. On pose pour tout $x \geq 0, f_n(x) = x^n + x - 1$

1. Montrer qu'il existe un unique nombre réel $x_n \geq 0$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Vérifier que $x_n \in]0;1[$.

2. a) Donner le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
   b) En déduire que la suite (x_n) est croissante.
   c) Justifier que la suite (x_n) est majorée.
   d) En déduire que la suite (x_n) converge puis montrer que nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Problème :

On note $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude de la fonction f

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Justifier que f est C^1 sur]-∞ ; 0[et sur]0 ;+∞[et vérifier que pour tout réel $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{u(x)}{(e^x - 1)^2}$$

où $u(x) = (1 - x)e^x - 1$

c) Étudier les variations de u sur $\mathbb{R}$.

d) Déterminer les limites de f en -∞ et en +∞.

e) Dresser le tableau de variations complet de f.

f) On admet que f est C^1 en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Tracer l'allure de la courbe de f (en représentant la tangente en 0 et l'asymptote en + ∞)

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un seul point fixe $\propto$, que l'on calculera.

2. a) Établir que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0$.
   b) Montrer que pour tout réel $x \geq 0, \frac{-1}{2} \leq f'(x) < 0$
   c) Montrer alors que pour tout n$\in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
   d) En déduire par récurrence sur n$\in \mathbb{N}$ *que* :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \alpha|$$

   e) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \int_x^{2x} f(t)dt$ et F une primitive de f.

1. Écrire pour tout réel x, $G(x)$ en fonction de F.
2. Montrer que G est C^1 sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} \; si \; x \neq 0 \\ 1 \; si \; x = 0 \end{cases}$$

3. a) Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq G(x) \leq xf(x)$$

   b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x)$.

4. Déterminer de même $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x)$.
5. Dresser le tableau de variation de G.