Devoir surveillé n°3

Exceptionnellement, les copies ne seront pas notées. Vous vous auto-corrigerez. Vous pouvez faire des raisonnements clairs et complets ou vous contenter de donner la méthode, l'idée pour gagner du temps. Si vous rédigez votre copie comme au concours, prenez soin d'utiliser le langage mathématique avec précision et de rendre un travail propre. Évitez les ratures, les fautes d'orthographe et de grammaire. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que vous voulez en revanche l'ordre des questions au sein d'un exercice doit être respecté. Vous pouvez admettre un résultat et l'utiliser si vous n'arrivez pas à le démontrer. Bon courage!

Barème indicatif sur 90 points

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Un peu de logique 5 points

Pour des assertions A et B, lorsque l'implication « Si A alors B » est vraie, on dit que A est suffisante pour avoir B et que B est nécessaire à A. Dire si l'assertion A_i est nécessaire ou suffisante pour l'assertion B_i, ou ni l'un ni l'autre:

1) A_1 : « les droites (d) et (D) sont parallèles » ;
   B_1 : « les droites (d) et (D) sont confondues ».

2) A_2 : « la famille est libre dans $\mathbb{R}_n[x]$ » ;
   B_2 : « on considère une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$, non nuls échelonnés en degré »

3) A_3 : « f est une application linéaire » ;
   B_3 : « f(0)=0 »

4) A_4 : « la suite (u) est croissante et majorée » ;
   B_4 : « la suite (u) est convergente ».

5) A_5 : « la famille est constituée de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ » ;
   B_5 : « la famille est libre dans $\mathbb{R}^n$ »

Problème 1 : Algèbre linéaire : Changement de base et commutant

35 points

On considère les matrices A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

1) a) Calculer $(A-I)^2$. En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.
   b) Que peut-on en déduire pour Ker(A) et rg(A) ?
   c) Que peut-on en déduire pour l'application f : est-elle injective, surjective, bijective ?

2) On pose N $=A-I$.
   a) Pour tout entier naturel n, exprimer A^n comme combinaison linéaire de I et N puis comme combinaison linéaire de I et A.
   b) Vérifier que l'expression obtenue à la question 2a) est encore valable pour n =-1.

3) On pose $u_1=(f-Id)(e_1)$ et $u_2=\ e_1+e_3$ où (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   a) Quelle est la matrice de $f-Id$ dans (e_1,e_2,e_3) ?
   b) Calculer u_1 et u_2.
   c) Justifier que le rang de $f-Id$ est 1.
   d) Montrer que (u_1,u_2) est une base de Ker$(f-Id)$.

4) a) Justifier que B = (u_1,u_2,e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Justifier que $Mat_B(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note T cette matrice.
   c) On pose $P=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer P^{-1} et vérifier que A = PTP^{-1}.

5) On note $(E_{i,j})_{1\le i,j\le 3}$ la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$.
   a) Quelle est la dimension de $M_3(\mathbb{R})$?
   b) Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec T, c'est-à-dire l'ensemble des matrices M de $M_3(\mathbb{R})$ qui vérifient MT=TM , est un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.
   c) Vérifier que ce sous espace vectoriel est engendré par la famille $(E_{1,1}+E_{3,3},E_{1,2},E_{1,3},E_{2,2},E_{2,3})$.

d) Quelle est la dimension de ce sous espace vectoriel ?
e) Soit J une matrice de $M_3(\mathbb{R})$. Justifier que J commute avec A si et seulement si $P^{-1}JP$ commute avec T.
f) En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est le sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par $(P(E_{1,1}+E_{3,3})P^{-1}, P\,E_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1})$.

<u>Exercice 2 :</u> Algèbre linéaire : Fonctions polynômiales 10 points

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[x]$ et on considère l'application f définie pour toute fonction polynômiale P de degré inférieur ou égal à 3 par $f(P) = (3x+8)P - x(5-x)P' + x^2(1-x)P''$.

1) Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_3[x]$? En donner une base.
2) Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[x]$.
3) Vérifier que la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[x]$ est M = $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
4) Déterminer le rang de f. L'application f est-elle surjective ?
5) Déterminer la dimension puis une base du noyau de f.

<u>Problème 2 :</u> Suites et séries 40 points

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$une suite qui converge vers une limite l. On définit pour tout entier n non nul la moyenne arithmétique des n premiers termes de cette suite, on pose donc : $v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$.

Partie A : On suppose de plus dans cette partie que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$est croissante.

1) a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par l.
   c) Que peut-on en déduire ?
2) a) Montrer que pour tout entier n non nul, $2v_{2n} \geq v_n + u_n$
   b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.

Partie B : On revient au cas général dans cette partie.

1) Soit $\varepsilon > 0$. On rappelle que $\exists N \geq 1$ tel que $\forall k > N, |u_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pourquoi ?
2) Montrer que pour tout $n > N$, on a :
$$|v_n - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k - l|$$
3) En déduire que $\forall n > N$,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
puis que $\exists N' \geq 1$ tel que $\forall n > N', |v_n - l| \leq \varepsilon$
4) Que peut-on en déduire ?

Partie C : Un premier exemple

On pose $u_0 \in [0;1[$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1+{u_n}^2}{2}$.

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \in]0;1[$.
   b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers un réel l que vous déterminerez.
2) Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = 1 - u_n$ et $t_n = \frac{1}{w_n}$
   a) Justifier que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   b) Montrer que pour tout entier naturel n,
   $$t_{n+1} - t_n = \frac{1}{1+u_n}$$
   puis justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{n+1} - t_n = \frac{1}{2}$
   c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) = \frac{1}{2}$ puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} nw_n = 2$
   d) Déterminer alors un équivalent en $+\infty$ de w_n. La série de terme général w_n est-elle convergente ?
   e) On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n}(w_k)^2$. Montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie D : Un deuxième exemple

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n\frac{1+2u_n}{1+3u_n}$.

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
   b) En déduire que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante puis que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente vers un réel l que vous déterminerez.
2) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}}$.
   a) Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{1+2u_{n-1}}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k$.
   c) Déterminer un équivalent en $+\infty$ de u_n. Que peut-on dire de la série de terme général u_n ?