Devoir surveillé n°1

La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Vous devez donc faire des raisonnements clairs et complets. Prenez soin d'utiliser le langage mathématique avec précision et de rendre une copie propre. Évitez les ratures, les fautes d'orthographe et de grammaire. Les exercices peuvent être traités dans l'ordre que vous voulez en revanche l'ordre des questions au sein d'un exercice doit être respecté. Vous pouvez admettre un résultat et l'utiliser si vous n'arrivez pas à le démontrer.

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 : Pour s'échauffer

Dans cet exercice les questions 1 à 6 sont indépendantes.

1) Soit n un entier naturel, factoriser (n+2)! + n!

2) Soit x un nombre réel, développer $(x+2)^5$.

3) Pour tous réels a et b, factoriser $a^3 - b^3$.

4) On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n : $u_{n+1} = 2u_n + 5$.
   Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = 6 \times 2^n - 5$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

6) a) Calculer $\binom{10}{2}$
   b) Pour p $\in \mathbb{N}$, simplifier $\binom{p+3}{p}$

Exercice 2 : Équations et inéquations

1) a) Quel est l'ensemble de définition de $\sqrt{-x^2+2x+3}$?
   b) En raisonnant par disjonction des cas, donnez les solutions de $\sqrt{-x^2+2x+3} = x$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x-1| < 4+x$.

3) a) Quel est l'ensemble de résolution de l'inéquation $\frac{1}{x-1} \leq \frac{3}{x+3}$?
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{1}{x-1} \leq \frac{3}{x+3}$.

Exercice 3 : Calculs de sommes doubles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Calculer les sommes suivantes:

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} jk \right)$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} jk \right)$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=j+1}^{n} jk \right)$$

Exercice 4 : Suites usuelles

On considère la suite définie par $u_0 = 2$; $u_1 = 1$
et pour tout entier n : $u_{n+2} = \frac{2u_{n+1}u_n}{3u_n - u_{n+1}}$

1) Calculer u_2 puis montrer que $u_3 = \frac{8}{11}$

2) Démontrer avec une récurrence double que pour tout entier n, $u_n \neq 0$.

3) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
   a) Vérifier que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$
   b) En déduire, pour tout entier n, l'expression de v_n en fonction de n.
   c) Soit n ∈ $\mathbb{N}^*$. En calculant de deux manières différentes $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$, montrer que $\frac{1}{u_n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}$
   d) En déduire que pour tout entier n, $u_n = \frac{2^n}{3\times 2^{n-1} - 1}$

Exercice 5 :

On note pour tout n≥ 1, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ et $u_n = S_{2n}$

1) Vérifier que pour tout entier naturel non nul on a :
   $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{(2n+2)(2n+1)}$
2) Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3) La suite (u_n) est-elle majorée ?

BONUS :
Pour a et b des réels,
exprimer min(a ; b) et max(a ; b) en fonction de a ; b et | $a - b$ |.

SI VOUS VOUS ENNUYEZ :

On pose, pour tous $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in \mathbf{N}$,

$$S_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + \cdots + n^p \quad \textit{(sommes de Newton).}$$

1. Calculer $S_{0,n}$.
2. *Calcul de $S_{1,n}$, première méthode*
   (a) Montrer, en faisant un changement d'indice, que $S_{1,n} = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)$.
   (b) Conclure.
3. *Calcul de $S_{1,n}$, deuxième méthode*
   (a) Exprimer $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2$ en fonction de $S_{2,n}$ en faisant un changement d'indice.
   (b) Exprimer $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2$ en fonction de $S_{2,n}$ et $S_{1,n}$ en développant $(k+1)^2$.
   (c) Conclure.
4. En généralisant la méthode précédente , montrer, pour tout $p \geqslant 1$, que

$$S_{p,n} = \frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p+1}{j} S_{j,n}\right).$$

5. En déduire $S_{2,n}$, $S_{3,n}$ et $S_{4,n}$.
   On remarquera en particulier que $S_{3,n} = (S_{1,n})^2$.
6. Cette dernière relation est propre au cas 1 et 3.
   On a même mieux : supposons que $p \in \mathbf{N}$ vérifie que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $S_{p,n} = m^2$.
   Montrer alors que $p = 3$.
   On pourra se placer dans le cas où $n = 2$ et utiliser le fait que si, pour x et y dans $\mathbf{N}$, x divise 2^y, alors x est aussi une puissance de 2.