CHAPITRE 20

Séries numériques

20.1 Généralités sur les séries

20.1.1 Définitions

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la **somme partielle d'indice n** associée à la suite (u_n) : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On appelle alors **série de terme général u_n**, et on note $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de ces sommes partielles.

Définition 2

- On dit que **la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge** si la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

  La limite de cette suite est alors appelée la **somme de la série**, qu'on note : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$.
- Si la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Définition 3

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, on appelle pour tout $n \in \mathbb{N}$, le **reste d'indice n** R_n :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Remarques :

R 1 – Déterminer la nature d'une série signifie qu'il faut déterminer si la série est convergente ou divergente.

R 2 – Si la série est convergente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n + R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

R 3 – Si la série est convergente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$$

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

R 4 – Il ne faut pas confondre les différents éléments de l'étude d'une série :
- u_n : la suite de base, le "terme général" de la série
- S_n : la somme partielle des u_k : c'est $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
- $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$: c'est la série, c'est la suite (S_n)
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$: c'est la somme de la série, la limite de (S_n) si elle existe.

R 5 – Puisque $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ et $S_{n-1} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$, on a

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = S_n - S_{n-1}$$

Exemple :

Soit q un réel quelconque. Soit (u_n) la suite géométrique définie par

$$u_n = q^n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle de la suite (u_n) est égale à

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Regardons si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, i.e. si la suite des sommes partielles (S_n) admet une limite.

- Si $q = 1$, on a

$$S_n = n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

donc dans ce cas là, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge dans le cas où $q = 1$.

- Si $q = -1$, on a

$$S_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ?$$

donc dans ce cas là, (S_n) n'admet pas de limite, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge dans le cas où $q = -1$

- Si $q > 1$, on a

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

puisque $-q^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $1 - q < 0$, donc dans ce cas là, (S_n) diverge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge dans le cas où $q > 1$.

- Si $q < -1$, on a
$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} ?$$
donc dans ce cas là, (S_n) n'admet pas de limite, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge dans le cas où $q < -1$
- Si $-1 < q < 1$, on a
$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}$$
puisque $q^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc dans ce cas là, (S_n) converge et admet pour limite $\frac{1}{1-q}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge dans le cas où $-1 < q < 1$ et dans ce cas là
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$$

20.1.2 Propriétés

Proposition 4
Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge nécessairement vers 0.

Démonstration :

On a dit précedemment que
$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = S_n - S_{n-1}$$
Si la série converge, cela veut dire que la suite (S_n) converge. Notons par exemple ℓ la limite de la suite (S_n). On a alors :
$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell, \qquad S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$
et donc
$$u_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$$

Remarques :

R 1 – On utilise souvent cette propriété dans le sens inverse :

SI (u_n) ne converge pas vers 0, ALORS la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge

R 2 – La réciproque de cette propriété est FAUSSE.
Si la suite (u_n) converge vers 0, on ne peut pas affirmer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exemple :

Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge.

Notons pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. Il s'agit de montrer que la suite (S_n) diverge.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Si on se fixe un entier $k \geqslant 1$, on a donc

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k}$$

et même pour tout $t \in [k, k+1]$, on a

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

On a donc

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dt \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{k}dt$$

autrement dit

$$\frac{1}{k+1}(k+1-k) \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k}(k+1-k)$$

i.e.

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k}$$

Soit $n \geqslant 1$. Puisqu'on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt \leqslant \frac{1}{k}$, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Or, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}dt = \int_1^2\frac{dt}{t} + \int_2^3\frac{dt}{t} + \cdots + \int_n^{n+1}\frac{dt}{t} = \int_1^{n+1}\frac{dt}{t}$ d'après la relation de Chasles.
De plus $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{\ell=2}^{n+1}\frac{1}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n+1}\frac{1}{\ell} - 1$.
On a donc montré que pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_{n+1} - 1 \leqslant \int_1^{n+1}\frac{dt}{t} \leqslant S_n$$

autrement dit

$$S_{n+1} - 1 \leqslant \ln(n+1) \leqslant S_n$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln(n+1) = +\infty$. On en déduit par comparaison que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n = +\infty$, ainsi la suite (S_n) diverge vers $+\infty$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n}$ diverge donc.

20.1.3 Opérations sur les séries convergentes

Proposition 5

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ deux séries.

1. *Pour tout réel λ non nul, les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ sont de même nature. De plus, si les séries convergent, on a :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$
2. *Si les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont convergentes, alors la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ est convergente également et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Remarque :

La réciproque de la deuxième propriété est fausse !
On peut avoir $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ qui converge, sans que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ni $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ ne convergent.

20.1.4 Liens entre suite et série

Proposition 6

Soit (u_n) une suite réelle, alors : (u_n) converge $\iff \sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge De plus, en cas de convergence, on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \lim_{n\to+\infty}(u_n-u_0)$$

Démonstration :

$\Longrightarrow$ Supposons que la suite (u_n) converge. Calculons la somme partielle d'indice n de la série de terme général $u_{n+1}-u_n$:
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_0$$
Comme la suite (u_n) converge, disons vers $\ell \in \mathbb{R}$, on a $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Ainsi
$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - u_0 = \lim_{n\to+\infty} \longrightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n-u_0)$$
Ainsi la série converge bien et sa somme vaut $\lim_{n\to+\infty}(u_n-u_0)$.

$\Longleftarrow$ Supposons que la série $\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge, autrement dit la somme partielle de la série converge vers un réel ℓ'. Or,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_0$$
autrement dit,
$$u_{n+1} = S_n + u_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell' + u_0$$
Ainsi, la suite (u_n) converge bien.

20.2 Critères de convergence pour les séries à termes positifs

Dans toute cette partie, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est à termes positifs, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.

20.2.1 Sommes partielles

Proposition 7

Soit $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs. Alors la suite des sommes partielles est une suite croissante.

Démonstration :

En effet, si on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0,$$

donc la suite (S_n) est bien croissante.

Théorème 8

Une série à termes positifs est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont majorées. Si la série diverge, alors elle diverge nécessairement vers $+\infty$.

20.2.2 Théorèmes de comparaison

Théorème 9 ***Théorème de comparaison***

Soient $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ deux séries telles qu'à partir d'un certain rang, on ait

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

Alors :

- *Si $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge.*
- *Si $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ diverge.*

Théorème 10 ***Théorème de négligeabilité***

Soient $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ deux séries à termes positifs, telles qu'on ait

$$u_n \underset{n \to +\infty}{=} o(v_n)$$

Alors :

- *Si $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge.*
- *Si $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ diverge.*

Théorème 11 ***Théorème d'équivalence***

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes positifs, telles qu'on ait*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *sont de même nature.*

20.2.3 Convergence absolue

Dans ce paragraphe, on n'impose plus à ce que la suite (u_n) soit positive.

Définition 12

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série. On dit que la série **converge absolument** si la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.

Théorème 13

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes quelconques.*

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est absolument convergente, ALORS, elle est aussi convergente.*

Démonstration :

En effet, si on regarde les sommes partielles : on sait d'après l'inégalité triangulaire que :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

Alors, si le terme de droite converge lorsque $n\to+\infty$ (i.e. la série converge absolument), alors le terme de gauche sera majoré, donc la série ne va pas diverger.

Remarques :

R 1 – La réciproque est fausse, ici également.

Par exemple, dans l'exercice 03.3, nous avons montré que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ convergeait.

Or, $\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n}$ diverge.

On peut donc avoir des séries convergentes, qui ne convergent pas absolument.

R 2 – Si une série $\sum u_n$ n'est pas de signe constant, alors on regarde $\sum |u_n|$ qui elle, est une série à termes positifs : on peut appliquer les critères de comparaison.

Si cette série $\sum |u_n|$ converge, alors on peut dire que $\sum u_n$ converge.

Si cette série $\sum |u_n|$ diverge, alors on ne peut a priori rien dire sur $\sum u_n$

20.3 Comparaison série-intégrale

Théorème 14

Soit f une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.
Alors, la série $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

Démonstration :

Comme la fonction f est décroissante sur $[1, +\infty[$, on a pour tout $k \geqslant 1$,

$$\forall t \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$$

Donc pour tout $k \geqslant 1$,

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)dt$$

autrement dit pour tout $k \geqslant 1$,

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k)$$

En sommant ces inégalités, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leqslant \int_1^n f(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} f(k) - f(1) \leqslant \int_1^n f(t)dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

Si $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge, la première inégalité donne que la série $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ converge.
Si $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge, la deuxième inégalité donne que la série $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ diverge.

Théorème 15 ***Séries de Riemann***

*Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée la **série de Riemann d'ordre** α. Alors*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

*En particulier, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, appelée la **série harmonique**, diverge.*
En particulier, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$, converge (vers $\frac{\pi^2}{6}$ ...)

Démonstration :

Cela provient de la comparaison série-intégrale et de la convergence des intégrales de Riemann.

20.4 Séries usuelles et sommes à connaître

20.4.1 Séries géométriques et dérivées

Théorème 16

*Soit $q \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geqslant 0} q^n$ s'appelle la **série géométrique de raison** q. Alors*

$$\sum_{n \geqslant 0} q^n \text{ converge } \iff |q| < 1$$

et alors si $|q| < 1$, on a

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$$

Proposition 17

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- *La série $\sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ s'appelle la **série géométrique dérivée première de raison** q. On a*

$$\sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1} \text{ converge } \iff |q| < 1$$

et si $|q| < 1$, on a alors :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}}$$

- *La série $\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ s'appelle la **série géométrique dérivée seconde de raison** q. On a*

$$\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2} \text{ converge } \iff |q| < 1$$

et si $|q| < 1$, on a alors :

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}}$$

20.4.2 Séries exponentielles

Théorème 18

Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$$