CHAPITRE 19

Intégrales impropres

19.1 Intégrales impropres

Définition 1

On appelle **intégrale impropre** toute intégrale du type $\int_a^b f(t)dt$ lorsque $a, b \in \{\pm\infty\}$ et si f est continue sur $]a, b[$ mais peut-être pas en a et/ou b.

Remarque :

Lorsque f est continue sur le segment $[a, b]$, il n'y a aucun problème, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ existe bien.

19.1.1 Intégration sur un intervalle $[a, b[$ ou $]a, b]$

Définition 2

Soient $a < b$ deux réels. Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a, b[$.
Si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ (i.e. la primitive de f qui s'annule en a) admet une limite finie lorsque x tend vers b^-, on dit que :

- **l'intégrale de f sur $[a, b[$ converge**,
- **l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente**,
- **f est intégrable sur $[a, b[$**,

et on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$$

Remarque :

De la même manière, lorsque f est continue par morceauxsur $]a, b]$, $\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)dt$ lorsque cette limite existe

Exemples :

E 1 – **Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$?**

La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$, donc on a un problème en 0.
On pose $x \in]0,1]$. On a

$$\int_x^1 \ln(t)dt = \Big[t\ln(t) - t\Big]_x^1 = -1 - x\ln(x) + x$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \int_x^1 \ln(t)dt = \lim_{x\to 0} (-1 - x\ln(x) + x) = -1$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$ est convergente et

$$\int_0^1 \ln(t)dt = -1$$

E 2 – **Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$?**

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0,1]$, donc on a un problème en 0.
On pose $x \in]0,1]$. On a

$$\int_x^1 \frac{1}{t}dt = \Big[\ln(t)\Big]_x^1 = -\ln(x)$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{1}{t}dt = \lim_{x\to 0} (-\ln(x)) = +\infty$$

Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ ne converge pas, on dit qu'elle est **divergente**.

Proposition 3

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ telle que f soit prolongeable par continuité en b (i.e. f admet une limite finie en b^-). Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge. On dit que l'intégrale est alors ***faussement impropre****.*

Exemple :

Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$?

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$, donc on a un problème a priori en 0.
Or, on sait que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

donc on peut prolonger la fonction f par continuité en posant $f(0) = 1$.
Ainsi, il n'y a en fait pas de problème car on a l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Ainsi, l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ est convergente.

19.1.2 Intégration sur un intervalle $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,a]$

Définition 4

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a,+\infty[$.
Si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ (i.e. la primitive de f qui s'annule en a) admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que :

- **l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ converge**,
- **l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente**,
- **f est intégrable sur $[a,+\infty[$**,

et on pose

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$$

Remarque :

On définit de la même façon l'intégrale

$$\int_{-\infty}^a f(t)dt$$

lorsqu'elle existe.

Exemples :

E 1 – **Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$?**

La fonction $f : t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc on a un problème a priori seulement en $+\infty$.
On pose $x \in [0,+\infty[$. On a

$$\int_0^x e^{-t}dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^x = 1 - e^{-x}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty} (1 - e^{-x}) = 1$$

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1}$$

E 2 – **Quelle est la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$?**

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$, donc on a un problème a priori seulement en $+\infty$.
On pose $x \in [1,+\infty[$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t}dt = \Big[\ln(t)\Big]_1^x = \ln(x)$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}dt = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ est divergente.

19.1.3 Intégration sur un intervalle quelconque

Définition 5

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soit f une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$.
On pose $c \in]a, b[$. Si les intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes, alors on dit que :

- l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente
- f est intégrable sur $]a, b[$

et on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Remarques :

- **R 1** – Aucune propriété n'est à connaître sur les intégrales impropres. Pour faire des calculs, on se ramène TOUJOURS à une intégrale sur un segment
- **R 2** – Sur un segment, sont valables : propriété de positivité, intégration par parties, changement de variable, ...

19.2 Critères de convergence

19.2.1 Intégrales de Riemann

Théorème 6 ***Intégrales de Riemann***

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \begin{cases} \textit{converge pour } \alpha < 1 \\ \textit{diverge pour } \alpha \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \begin{cases} \textit{converge pour } \alpha > 1 \\ \textit{diverge pour } \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

Démonstration :

- Pour $\alpha = 1$, on a déjà vu que $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ ne converge pas.
- Pour $\alpha \neq 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, 1]$. On considère $x \in]0, 1[$. Alors

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[-\frac{1}{(\alpha - 1)t^{\alpha-1}} \right]_x^1 = \frac{1}{(\alpha - 1)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{\alpha - 1}$$

Donc cette quantité admet une limite finie lorsque $x \to 0$ si et seulement si $\alpha - 1 < 0$, c'est-à-dire si $\alpha < 1$.

- Pour $\alpha = 1$, on a déjà vu que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ ne converge pas.
- Pour $\alpha \neq 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, 1]$. On considère $x > 1$. Alors

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[-\frac{1}{(\alpha - 1)t^{\alpha-1}} \right]_1^x = \frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{(\alpha - 1)x^{\alpha-1}}$$

Donc cette quantité admet une limite finie lorsque $x \to +\infty$ si et seulement si $\alpha - 1 > 0$, c'est-à-dire si $\alpha > 1$.

19.2.2 Théorèmes pour les fonctions positives

Théorème 7 ***Théorème de comparaison***

Soient $a < b$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ telles que

$$\forall t \in [a, b[, \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$$

- *Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.*
- *Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.*

Exemple :

Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}dt$?

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2+t+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc on a un problème a priori seulement en $+\infty$.
Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{t^2+t+1} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale de Riemann qui converge, donc d'après les critères de convergence sur les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}dt$ converge.
Par ailleurs, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}dt$ est convergente puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2+t+1}$ est continue sur $[0, 1]$.
En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}dt$ est une intégrale convergente.

Théorème 8 ***Théorème de négligeabilité***

Soient $a < b$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ telles que

$$f(t) \underset{t \to b^-}{=} o\left(g(t)\right)$$

- *Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.*
- *Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.*

Théorème 9 ***Théorème d'équivalence***

Soient $a < b$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, b[$ telles que

$$f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$$

Alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Exemples :

E 1 – **Quelle est la nature de l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2-5t+7}{(t+1)(4t^2-t+2)}dt$ **?**

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t^2-5t+7}{(t+1)(4t^2-t+2)}$ est continue sur $[0,+\infty[$ (c'est une fraction rationnelle et le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,+\infty[$), donc on a un problème a priori seulement en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\frac{t^2-5t+7}{(t+1)(4t^2-t+2)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^2}{4t^3} = \frac{1}{4t}$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{4t}dt$ est une intégrale de Riemann qui diverge, donc d'après les critères d'équivalence sur les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2-5t+7}{(t+1)(4t^2-t+2)}dt$ diverge.
En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2-5t+7}{(t+1)(4t^2-t+2)}dt$ est une intégrale divergente.

E 2 – **Quelle est la nature de l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ **?**

La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$, donc on a un problème a priori uniquement en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$t^2e^{-t^2} = \frac{t^2}{e^{t^2}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (Intégrale de Riemann), donc d'après les critères de négligeabilité pour les intégrales de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.
Puisque l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}dt$ existe bien (intégrale d'une fonction continue sur un segment), on a donc bien d'après la relation de Chasles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.

19.2.3 Intégrales absolument convergentes

Définition 10

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soit f une fonction continue sur $]a,b[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.

Théorème 11

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *est absolument convergente, alors l'intégrale est convergente.*

Remarque :

La réciproque est fausse ! On peut avoir $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ qui converge et $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ qui diverge.