CHAPITRE 18

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

18.1 Changements de bases

18.1.1 Matrice de passage entre deux bases

Définition 1

Soit E un espace vectoriel de dim. n et soient $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ et $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$**, que l'on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, la matrice qui exprime en colonnes les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_2} & \cdots & \overrightarrow{u_n} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{e_n} \end{array}$$

Remarque :

> Une matrice de passage est en fait la matrice de l'application linéaire Id_E qui va de E dans E, exprimée dans les bases $\mathcal{B}'$ (départ) et $\mathcal{B}$ (arrivée).

Exemples :

> **E 1** – Soient $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}_2 = (1, X-1, (X-1)^2)$ une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$.
> Quelle est la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$?
> Quelle est la matrice de passage Q de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$?

Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ signifie qu'il nous faut exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{B}_2$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

- On a $1 = 1 + 0.X + 0.X^2$, donc $P = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$
- On a $X - 1 = -1 + 1.X + 0.X^2$, donc on complète : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$
- On a $(X-1)^2 = 1 - 2X + X^2$, donc on complète : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$ signifie qu'il nous faut exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$ dans la base $\mathcal{B}_2$.

- On a $1 = 1 + 0.(X-1) + 0.(X-1)^2$, donc $Q = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$
- On cherche a, b, c tels que $X = a + b(X-1) + c(X-1)^2$, donc on veut

$$X = (a-b+c) + (b-2c)X + cX^2 \iff \left\{ \begin{array}{l} c = 0 \\ b - 2c = 1 \\ a - b + c = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} c = 0 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{array} \right.$$

  Donc $X = 1 + (X-1) + 0.(X-1)^2$. Ainsi, on complète : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$
- On cherche a, b, c tels que $X^2 = a + b(X-1) + c(X-1)^2$, donc on veut

$$X^2 = (a-b+c) + (b-2c)X + cX^2 \iff \left\{ \begin{array}{l} c = 1 \\ b - 2c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} c = 1 \\ b = 2 \\ a = 1 \end{array} \right.$$

  Donc $X^2 = 1 + 2(X-1) + 1.(X-1)^2$. Ainsi, on complète : $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$ est $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 2

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est une matrice inversible, et de plus $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

Remarques :

R 1 – En effet, on peut remarquer dans l'exemple précédent qu'on a bien $PQ = QP = I_3$.

R 2 – La plupart du temps, pour déterminer $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}$, on utilisera plutôt la méthode du pivot de Gauss sur la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ plutôt que de déterminer la matrice $\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ en revenant à la définition.

18.1.2 Changement de coordonnées pour un vecteur

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et soit $\overrightarrow{u} \in E$.
On note X la matrice colonne représentant le vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.
On note X' la matrice colonne représentant le vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}'$.
On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors,

$$\boxed{X = PX'}$$

Remarque :

Pour retenir de la formule, il faut se rappeler qu'on "colle" toujours les bases ensemble :

$$\underset{\mathcal{B}}{X} = \underset{\mathcal{B}\mathcal{B}'}{P} \ \underset{\mathcal{B}'}{X'}$$

Exemple :

Considérons la base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}_2[X]$: $(1, X-1, (X-1)^2)$.
Calculer les coordonnées du polynôme $R(X) = 4X^2 - 3X + 7$ dans la base $\mathcal{B}_2$.

Dans la base canonique $\mathcal{B}_1$, on a facilement les coordonnées de $R(X)$: $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
On sait donc d'après la proposition précédente que les coordonnées de $R(X)$ dans la base $\mathcal{B}_2$ sont données par

$$P_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

18.1.3 Changement de bases pour une application linéaire

Proposition 4

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F.
Notons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Notons $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F.
On note A la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.
On note A' la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.
Alors,

$$A' = P_{\mathcal{C}'\mathcal{C}} A P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

Remarque :

Pour retenir la formule, il faut se rappeler qu'on "colle" toujours les bases ensemble :

$$\underset{\mathcal{C}'\mathcal{B}'}{A'} = \underset{\mathcal{C}'\mathcal{C}}{P} \ \underset{\mathcal{C}\mathcal{B}}{A} \ \underset{\mathcal{B}\mathcal{B}'}{P}$$

Il faut toujours lire de la droite vers la gauche, comme pour une application

18.1.4 Changement de base pour un endomorphisme

Proposition 5

*On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace vectoriel E et soit f un endomorphisme de E.
On note M la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et M' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.
On note $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
Alors,*

$$M = PM'P^{-1}$$

Exemple :

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$f(aX^2 + bX + c) = aX^2 - (b + 4a)X + (6a + 4b + 3c)$$

On garde encore les notations précédentes : $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}_2 = (1, X - 1, (X - 1)^2)$.
Déterminons la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}_1$, puis la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}_2$.

Pour déterminer la matrice M, il nous calculer les coordonnées de $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$ dans la base canonique.
On a : $f(1) = 3$, $f(X) = -X + 4$ et $f(X^2) = X^2 - 4X + 6$. Ainsi, la matrice M de f dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a calculé P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ et son inverse : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Donc d'après la formule de changement de base, la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}_2$ est :

$$M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18.1.5 Matrices équivalentes

Définition 6

Soient A et B deux matrices de même taille : n lignes et p colonnes.
On dit que **A et B sont équivalentes** si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists Q \in GL_p(\mathbb{K}),\ /\ A = PBQ$$

Proposition 7

Deux matrices A et B sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire f, dans des bases différentes.

Remarque :

Lorsqu'on fait une opération élémentaire sur une matrice (échange de lignes, échange de colonnes, ...), en réalité on multiplie la matrice par une matrice inversible à gauche ou à droite (voir TD). Ainsi, lorsqu'on fait la méthode du pivot de Gauss, les matrices sont bien équivalentes.

18.1.6 Matrices semblables

Définition 8

Soient A et B deux matrices carrées de taille n.
On dit que **A et B sont semblables** si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \ / \ A = PBP^{-1}$$

Proposition 9

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans deux bases différentes.

Proposition 10

*Soient M et M' deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Il existe donc une matrice inversible P telle que $M = PM'P^{-1}$. Alors*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad M^k = P\left(M'\right)^k P^{-1}$$

Démonstration :

Démontrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(k)$: "$M^k = P(M')^k P^{-1}$" est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
$k = 0$. On a $M^0 = I$ et $P(M')^0 P^{-1} = PP^{-1} = I$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est bien vraie.
Soit $k \geqslant 0$ fixé. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. Alors

$$M^{k+1} = M^k M = P(M')^k P^{-1} \times PM'P^{-1} = P(M')^{k+1} P^{-1}$$

Ainsi, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie également.
Ainsi, on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}, M^k = P(M')^k P^{-1}$.

Remarque :

Ainsi, si on sait bien calculer $(M')^k$, on peut en déduire la valeur de M^k. Ce sera donc un avantage considérable si on arrive à montrer que M est semblable à une matrice dont on sait facilement calculer les puissances, par exemple les matrices diagonales.

Exemple :

Reprenons toujours notre exemple fil rouge. Nous avons montré que $M = P^{-1}M'P$ avec $M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Puisque M' est diagonale, on a donc que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad (M')^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = P^{-1}(M')^k P$, après calculs on trouve l'expression de M^k :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{pmatrix} 3^k & 3^k + (-1)^{k+1} & 3^k + 2(-1)^{k+1} + 1 \\ 0 & (-1)^k & 2(-1)^k - 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18.2 Valeurs propres et vecteurs propres

On désignera à présent par E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Le but à présent est, si on se donne un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ de trouver une "bonne base" $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ de E, dans laquelle la matrice de f soit la plus simple possible, c'est-à-dire diagonale. Autrement dit, on aimerait avoir une base $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ et des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$mat_{(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, il faudrait que ces vecteurs et ces scalaires vérifient

$$f(\overrightarrow{e_1}) = \lambda_1 \overrightarrow{e_1}, \qquad f(\overrightarrow{e_2}) = \lambda_2 \overrightarrow{e_2}, \qquad \cdots, \qquad f(\overrightarrow{e_n}) = \lambda_n \overrightarrow{e_n}$$

18.2.1 Définitions

Définition 11

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
  On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ non nul tel que
  $$f(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$$
  Un vecteur $\overrightarrow{x}$ non nul vérifiant l'égalité précédente est alors appelé un **vecteur propre de f associé à la valeur propre λ**.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
  On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de la matrice A s'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle telle que
  $$AX = \lambda X$$
  Une matrice colonne X non nul vérifiant l'égalité précédente est alors appelée un **vecteur propre de A associé à la valeur propre λ**.

Remarque :

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé **spectre de f** et est noté $Sp(f)$.
De même, l'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée A est appelé **spectre de A** et est noté $Sp(A)$.

Exemples :

E 1 – Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = (X-1)P' + P$$

Calculons $f((X-1)^2)$ et déduisons-en une valeur propre de f.

$$f((X-1)^2) = 2(X-1)^2 + (X-1)^2 = 3(X-1)^2$$

Ainsi, 3 est une valeur propre de f et le polynôme $(X-1)^2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

E 2 – Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculons AX et déduisons-en une valeur propre de A.

$$AX = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3X$$

Ainsi, 3 est une valeur propre de A et X est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

Proposition 12

- *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit λ une valeur propre de f. On pose*

$$E_\lambda(f) = \{\overrightarrow{x} \in E \ / \ f(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}\}$$

Alors $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E que l'on appelle ***sous-espace propre de f associé à λ****.*

- *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit λ une valeur propre de A. On pose*

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = \lambda X\}$$

Alors $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ que l'on appelle ***sous-espace propre de A associé à λ****.*

Remarques :

R 1 – Le sous-espace propre associé à une valeur propre de f est donc l'ensemble de tous les vecteurs propres de f, auquel on rajoute le vecteur nul.

R 2 – Le sous-espace propre associé à une valeur propre de A est donc l'ensemble de tous les vecteurs propres de A, auquel on rajoute la matrice colonne nulle.

Démonstration :

Prouvons-le pour $E_\lambda(f)$: montrons que c'est un sous-espace vectoriel de E.

- $E_\lambda(f) \subset E$ par définition.
- $\overrightarrow{0} \in E_\lambda(f)$ puisque $f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0} = \lambda.\overrightarrow{0}$, donc $E_\lambda(f) \neq \emptyset$.
- Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E_\lambda(f)$: on a $f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u}$ et $f(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}$.
  Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrons que $\alpha \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E_\lambda(f)$.

$$f(\alpha \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) = \alpha(\lambda \overrightarrow{u}) + (\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda(\alpha \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$$

  donc $\alpha \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E_\lambda(f)$. Ainsi, $E_\lambda(f)$ est bien stable par combinaison linéaire.

Ainsi, on a montré que $E_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque :

On a

$$E_\lambda(f) = \{\overrightarrow{u} \in E \ / \ f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u}\} = \operatorname{Ker}(f - \lambda Id_E)$$

De même,

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ / \ AX = \lambda X\} = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$$

18.2.2 Propriétés

Proposition 13

Soit f un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

1. *λ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une valeur propre de A.*
2. *un vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ est un vecteur propre de f associé à λ si et seulement si la matrice colonne X associée à $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.*

Remarque :

On voit donc que chercher les valeurs propres d'un endomorphisme ou de sa matrice associée dans une base fixée revient au même

Proposition 14

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\boxed{\lambda \in \mathbb{K} \text{ est une valeur propre de } f \iff f - \lambda Id_E \text{ non bijective}}$.*
   En particulier, 0 est une valeur propre de f si et seulement si f n'est pas bijective.
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\boxed{\lambda \in \mathbb{K} \text{ est une valeur propre de } A \iff A - \lambda I_n \text{ non inversible}}$.*
   En particulier, 0 est une valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.

Remarques :

R 1 – **Méthode pour déterminer les valeurs propres d'une matrice**.
Pour chercher les valeurs propres d'une matrice A, on regarde donc la matrice $A-\lambda I_n$ pour n'importe quelle valeur de λ et on la triangularise pour regarder son rang.
Toutes les valeurs de λ pour lesquelles cette matrice n'est pas inversible (i.e. le rang est différent de n) fournissent les valeurs propres de la matrice A.

R 2 – Si une matrice est triangulaire, les valeurs propres sont ses éléments diagonaux

Exemple :

Déterminons les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1-2\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 0 & 1+\lambda & -\lambda-1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_2 + (2+\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda+1 & 1 \\ 0 & -\lambda-\lambda^2 & 1+\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda-1 \end{pmatrix} \quad C_2 \leftrightarrow C_2 + C_3$$

Ainsi, la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible si $-\lambda - 1 = 0$ ou si $-\lambda - \lambda^2 = 0$, c'est-à-dire si $\lambda = -1$ ou $\lambda = 0$.
La matrice A admet donc deux valeurs propres qui sont 0 et -1.

18.2.3 Vecteurs propres et sommes directes

Théorème 15 ***Familles libres de vecteurs propres***

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f.
Soient $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.
Alors, la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille libre de E.

Démonstration :

Raisonnons par récurrence sur le nombre p de valeurs propres.
$p = 1$. Supposons qu'on ait un seul vecteur propre $\overrightarrow{u_1}$, alors la famille $(\overrightarrow{u_1})$ est bien une famille libre puisque $\overrightarrow{u_1}$ est non nul.
Soit $p \geqslant 1$. Supposons que la propriété soit vraie au rang p, i.e. si on a p vecteurs propres pour p valeurs propres différentes, alors ils forment une famille libre de E.
Considérons une famille de vecteurs propres $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p+1}})$.
Soient $a_1, \dots, a_{p+1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$a_1\overrightarrow{u_1} + a_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_{p+1}\overrightarrow{u_{p+1}} = \overrightarrow{0} \qquad (1)$$

On applique f à cette égalité, on obtient :

$$a_1 f(\overrightarrow{u_1}) + a_2 f(\overrightarrow{u_2}) + \cdots + a_{p+1} f(\overrightarrow{u_{p+1}}) = \overrightarrow{0}$$

soit

$$a_1\lambda_1\overrightarrow{u_1} + a_2\lambda_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + a_{p+1}\lambda_{p+1}\overrightarrow{u_{p+1}} = \overrightarrow{0} \qquad (2)$$

Alors, $\lambda_{p+1}(1) - (2)$ donne :

$$\sum_{k=1}^{p} (\lambda_{p+1} - \lambda_k)\, a_k\overrightarrow{u_k} = 0$$

Comme la famille $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est libre, on a donc :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ a_k(\lambda_{p+1} - \lambda_k) = 0$$

Or, on sait que $\lambda_k \neq \lambda_{p+1}$, donc on a bien $a_k = 0$.
En réinsérant ces a_k dans l'égalité du départ, on obtient également $a_{p+1} = 0$.
Ainsi, la propriété est encore vraie au rang $p + 1$.
Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Proposition 16

1. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, les valeurs propres distinctes de f. Alors les sous-espaces propres correspondants sont tous en somme directe, i.e. $E_{\lambda_1}(f) + E_{\lambda_2}(f) + \cdots + E_{\lambda_k}(f) = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus \cdots + E_{\lambda_k}(f)$.*

   En particulier, on a : $\dim(E_{\lambda_1}(f) + E_{\lambda_2}(f) + \cdots + E_{\lambda_k}(f)) = \sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(f))$ et donc :

   $$\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(f)) \leqslant n$$

2. *Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n admet donc au plus n valeurs propres distinctes.*

18.2.4 Polynômes annulateurs

Définition 17

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$.

Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note $P(f)$ l'endomorphisme défini par $P(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k = a_0 Id_E + a_1 f + \cdots + a_p f^p$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $P(A)$ la matrice définie par $P(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p$

Définition 18

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un **polynôme annulateur de f** si $P(f) = 0$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un **polynôme annulateur de A** si $P(A) = 0$.

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$. Montrons que P est un polynôme annulateur de A.

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

$$P(A) = A^3 - 3A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

Donc P est bien un polynôme annulateur de A.

Théorème 19

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et P un polynôme annulateur de f. Toute valeur propre de f est une racine de P.

Démonstration :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. Notons $\overrightarrow{u}$ un vecteur propre de f associé à λ, on a donc $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ en particulier. On a donc $f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u}$, on a également $f^2(\overrightarrow{u}) = f(\lambda \overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{u}) = \lambda^2 \overrightarrow{u}$ et par récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^k(\overrightarrow{u}) = \lambda^k \overrightarrow{u}$$

Ainsi, si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^p$ est un polynôme annulateur de f, alors

$$P(f)(\overrightarrow{u}) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k(\overrightarrow{u}) = \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k \overrightarrow{u} = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k \right) \overrightarrow{u} = (P(\lambda))\, \overrightarrow{u}$$

Or, $P(f)(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ puisque $P(f) = 0$. Ainsi, $(P(\lambda))\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et donc $P(\lambda) = 0$ puisque $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$. On a donc bien montré que λ est une racine de P.

Remarque :

La réciproque est fausse : toutes les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément des valeurs propres. La connaissance d'un polynôme annulateur ne nous donne donc que des possibilités de valeurs propres.

Exemple :

Déterminons les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a montré que $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$ était un polynôme annulateur de A. Or,

$$P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X = X\left(X^2 - 3X + 2\right) = X(X-1)(X-2)$$

On sait donc que les valeurs propres possibles sont parmi l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. Il nous faut donc à présent vérifier si oui ou non 0, 1 et 2 sont valeurs propres ou non.

- $$AX = 0X \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

  Il n'y a pas de X non nul qui peut être solution de $AX = 0X$, donc 0 n'est pas valeur propre.

- $$AX = 1X \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + z = x \\ y - 2z = y \\ 2z = z \end{cases} \iff z = 0$$

  Par exemple $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient. Donc 1 est une valeur propre de A.

- $$AX = 2X \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + z = 2x \\ y - 2z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

  Le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient : 2 est bien une valeur propre de A.

Ainsi, les valeurs propres de la matrice A sont 1 et 2.

Remarque :

Il faut savoir redémontrer dans les exercices que les valeurs propres sont des racines du polynôme annulateur

Exemple :

Prenons f un endomorphisme de E tel que $f^2 - 3f + 2Id = 0$. Quelles sont les valeurs propres possibles de f ?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f. Alors il existe $\overrightarrow{x} \in E$, $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0_E}$ tel que $f(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$. On a alors :

$$(f^2 - 3f + 2Id) = 0 \Longrightarrow (f^2 - 3f + 2Id)(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \lambda^2\overrightarrow{x} - 3\lambda\overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow (\lambda^2 - 3\lambda + 2)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

et puisque $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$, on a nécessairement $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, autrement dit, $\lambda = 2$ ou $\lambda = 1$.
Les deux seules valeurs propres possibles de f sont donc 1 ou 2.

18.3 Diagonalisation

18.3.1 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Définition 20

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
  On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est une **matrice diagonalisable** si A est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire si

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ diagonale } / \ A = PDP^{-1}$$

Remarques :

R 1 – Un endomorphisme f est donc diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

R 2 – La matrice D contient les valeurs propres de la matrice A, et la matrice P contient les vecteurs propres correspondans dans le même ordre.

18.3.2 Théorèmes de réduction

Théorème 21

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ toutes les valeurs propres distinctes de f. Alors, on a :

$$\begin{aligned} f \text{ diagonalisable } &\iff E = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f) \\ &\iff \sum_{k=0}^{p} \dim(E_{\lambda_k}(f)) = n \end{aligned}$$

Remarque :

De même, une matrice A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut n

Théorème 22 ***Cas particulier : n valeurs propres***

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.*
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.*

Théorème 23 ***Cas particulier : une seule valeur propre***

1. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f n'admet qu'une seule valeur propre λ, alors f est diagonalisable si et seulement si $f = \lambda Id$.*
2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A n'admet qu'une seule valeur propre λ, alors A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I_n$.*