CHAPITRE 16

Formules de Taylor et Développements Limités

16.1 Formules de Taylor

16.1.1 Formule de Taylor-Polynôme

Théorème 1 ***Formule de Taylor-Polynôme***

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$. Alors pour tout $a \in \mathbb{K}$, on a :

$$\boxed{P(a+X) = P(a) + P'(a)X + \frac{P''(a)}{2}X^2 + \frac{P^{(3)}(a)}{3!}X^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}X^n}$$

où $P^{(k)}$ désigne le polynôme dérivé k-ième de P. Autrement dit, on a :

$$\boxed{P(a+X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}X^k}$$

Remarques :

R 1 – On peut aussi écrire ce théorème de cette manière : pour $a \in \mathbb{K}$,

$$P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \frac{P''(a)}{2}(X-a)^2 + \frac{P^{(3)}(a)}{3!}(X-a)^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

et en particulier pour le cas où $a = 0$, on a :

$$\boxed{P(X) = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2}X^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{3!}X^3 + \cdots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}X^n}$$

R 2 – Les coefficients d'un polynôme P sont donc en réalité les dérivées successives de P en 0 divisés par des factorielles

R 3 – Ce théorème va nous servir pour essayer d'"approcher" une fonction de classe suffisante par un polynôme

Démonstration :

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ et soit $a \in \mathbb{K}$.

Notons $Q(X) = P(a+X)$: c'est un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$. Puisque $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, on sait qu'il existe $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que

$$(*) P(a+X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_n X^n$$

En évaluant en $x = 0$, on obtient :

$$P(a) = \lambda_0$$

Si on dérive la relation $(*)$, on a :

$$P'(a+X) = \lambda_1 + 2\lambda_2 X + \cdots + n\lambda_n X^{n-1}$$

En évaluant cette relation en $x = 0$, on obtient :

$$P'(a) = \lambda_1$$

Plus généralement, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, en dérivant k fois $(*)$, on obtient :

$$P^{(k)}(a+X) = k!\lambda_k +$$

16.1.2 Formule de Taylor-Reste Intégral

Théorème 2 ***Formule de Taylor-Reste Intégral***

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors, pour tous $a, b \in I$, on a :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Remarque :

Ce théorème n'est pas à retenir, il sera TOUJOURS redonné à démontrer dans les exercices/problèmes l'utilisant. Sa preuve est donc à connaître et n'est pas très compliquée, il suffit de faire une récurrence et une intégration par parties

Démonstration :

Pour $n = 0$. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On veut montrer que

$$\forall a, b \in I,\ f(b) = f(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f^{(1)}(t)dt = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$$

Or, cette formule est bien vraie, car puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, on a $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.
La formule est donc bien vérifiée au rang $n = 0$.

Soit $n \geqslant 0$. Supposons que la propriété soit vraie si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I.
Prenons à présent f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I. En particulier, elle est aussi de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I, donc on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, à savoir la propriété au rang n : Pour a et b dans I,

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Faisons une intégration par parties dans l'intégrale qui apparaît dans la formule.
Posons $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $v'(t) = \dfrac{(b-t)^n}{n!}$.
On a $u'(t) = f^{(n+2)}(t)$ et $v(t) = -\dfrac{1}{n+1}\dfrac{(b-t)^{n+1}}{n!} = \dfrac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$
Puisque f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$, u est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
De plus, v est un polynôme, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.
On peut donc bien utiliser une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt &= \left[f^{(n+1)}(t)\frac{-(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt\end{aligned}$$

En reportant dans la formule précédente, on obtient alors la propriété au rang $n+1$.
Par récurrence, la formule est donc bien montrée pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$.

Exemple :

Prenons la fonction exponentielle $f(x) = \exp(x)$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Alors pour tout $x > 0$, en appliquant la formule à f entre 0 et x, on a :

$$\exp(x) = \exp(0) + \frac{\exp'(0)}{1!} + \cdots + \frac{\exp^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\exp^{(n+1)}(t)dt$$

Or, puisque $\forall k \geqslant 0,\ \exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$, on a donc :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\exp(t)dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\exp(t)dt$$

On a alors, puisque $\forall t \in [0,x]$, $e^t \leqslant e^x$

$$\begin{aligned}\left|\exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right| &= \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt\right| \\ &\leqslant \int_0^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!}e^t\right| dt \\ &\leqslant e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

On en déduit donc par passage à la limite la formule de la série exponentielle :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \exp(x)}$$

16.2 Fonction négligeable devant une autre

16.2.1 Définitions

Définition 3

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.
On dit que **f est négligeable devant g au voisinage de x_0** s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0$$

On note alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big)}$$

Remarques :

R 1 – Losque $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$, **$g(x)$ est prépondérant devant $f(x)$ au voisinage de x_0.**

R 2 – Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0), alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

R 3 – Il y a désormais trois possibilités pour comparer deux fonctions au voisinage de x_0 :
- l'inégalité : $f(x) \leqslant g(x)$
- l'équivalence : $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$
- la négligeabilité : $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$

Exemples :

E 1 – **Fonctions puissances** :

$$\text{si } \alpha < \beta, \qquad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\big(x^\beta\big)$$

$$\text{si } \alpha < \beta, \qquad x^\beta \underset{x\to 0}{=} o\big(x^\alpha\big)$$

E 2 – **Puissances et Logarithmes** :

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad (\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\big(x^\beta\big)$$

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad (\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

E 3 – **Puissances et Exponentielles** :

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\big(e^{\beta x}\big)$$

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad e^{\beta x} \underset{x\to-\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

E 4 – **Logarithmes et Exponentielles** :

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad (\ln(x))^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{\beta x}\right)$$

16.2.2 Propriétés

- l'addition

$$\text{si } f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \quad \text{et } f_2(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big), \qquad \text{alors } f_1(x)+f_2(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$$

- la multiplication par un scalaire $\alpha \neq 0$

$$\text{si } f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(kg(x)\big), \qquad \text{alors } f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$$

$$\text{si } kf(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big), \qquad \text{alors } f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$$

- la multiplication par une fonction.
  Soit u une fonction qui ne s'annule pas au voisinage de x_0. Alors :

$$\text{si } \; f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big), \qquad \text{alors } u(x)f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(u(x)g(x)\big)$$

$$\text{si } \; f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big), \qquad \text{alors } \frac{f(x)}{u(x)} \underset{x\to x_0}{=} o\left(\frac{g(x)}{u(x)}\right)$$

- le produit.

$$\text{si } f_1(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)\big) \quad \text{et } f_2(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_2(x)\big), \qquad \text{alors } f_1(x)f_2(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$$

- la valeur absolue.

$$\text{si } f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big), \qquad \text{alors } |f(x)| \underset{x\to x_0}{=} o\big(|g(x)|\big)$$

- l'inverse.
  Soit f une fonction qui ne s'annule pas au voisinage de x_0. Alors :

$$\text{si } \; f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big), \qquad \text{alors } \frac{1}{g(x)} \underset{x\to x_0}{=} o\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

- changement de variable.
  Soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit u une fonction définie au voisinage de t_0 avec $\lim\limits_{t\to t_0} u(t) = x_0$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{si } \; f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big), \qquad \text{alors } f(u(t)) \underset{t\to t_0}{=} o\Big(g(u(t))\Big)$$

- transitivité

$$\text{si } f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \quad \text{et } g(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(h(x)\big), \qquad \text{alors } f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(h(x)\big)$$

Proposition 4 ***Lien entre équivalence et négligeabilité***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1.

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \iff f(x)-g(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(g(x)\big) \iff g(x)-f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(f(x)\big)$$

2.

$$\text{si } \; g(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(f(x)\big), \qquad \text{alors } f(x)+g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x)$$

3.

$$\text{si } \; f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(u(x)\big) \quad \text{et } u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x), \qquad \text{alors } f(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(v(x)\big)$$

16.3 Développements limités

16.3.1 Développement limité en 0

Définition 5

Soit f une fonction définie au voisinage de 0.
On dit que **f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0** s'il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que au voisinage de 0 :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + o\big(x^n\big)}$$

autrement dit, $f(x)$ s'écrit localement comme la somme de :

- une fonction polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, appelé la **partie régulière du DL**
- une fonction négligable devant x^n : $o(x^n)$, appelé le **reste du DL**

Remarque :

On peut aussi définir le développement limité au voisinage de n'importe quel point $x_0 \in \mathbb{R}$

Définition 6

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est définie au voisinage de x_0, on dit que **f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0** s'il existe $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Théorème 7

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, alors la partie régulière de ce développement limité est unique.

16.3.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 8 ***Formule de Taylor-Young***

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et si $x_0 \in I$, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)}$$

Remarque :

Le plus souvent, on utilise ce théorème dans le cas particulier où $x_0 = 0$, ce qui donne :

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + o(x^n)}$$

Proposition 9

Si f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + o((x - x_0)^n)$$

Alors, on a nécessairement $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a_0$.
De plus, au voisinage de x_0, f est équivalente au premier terme non nul de son développement limité : c'est-à-dire que si p est tel que pour tout $0 \leqslant k \leqslant p - 1$, $a_k = 0$ et $a_p \neq 0$, alors, on a au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} a_p(x - x_0)^p$$

16.3.3 DL usuels

Théorème 10 ***DL usuels*** ***<u>AU VOISINAGE DE</u>*** $\underline{0}$

Les DL usuels suivants existent d'après le Théorème de Taylor-Young. Il faut les apprendre par coeur.

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

$$\boxed{(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})}$$

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})}$$

16.3.4 Opérations sur les DL

Proposition 11

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant chacune un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$

1. *Alors $f + g$ admet le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 suivant :*

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k + o(x^n)$$

2. *Alors fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 que l'on obtient en faisant le produit des polynômes $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.*

Exemple :

Calculer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\dfrac{e^x}{1+x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{e^x}{1+x} &= e^x \times \frac{1}{1+x} \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) \\
&= 1 - x + x^2 + x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

Proposition 12

Soit $f : I \to J$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et <u>telle que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$</u> :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k x^k}_{P(x)} + o(x^n)$$

Soit $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$g(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k}_{Q(x)} + o(x^n)$$

Alors $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n que l'on obtient effectuant $Q \circ P$ et en ne gardant que les termes de dégré inférieur ou égal à n.

Exemple :

Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $e^{\sqrt{x+1}}$.

$$\begin{aligned}
e^{\sqrt{x+1}} &= \exp\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right) \\
&= e\times\exp\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right) \\
&= e\times\left(1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\right) \\
&= e\left(1+\frac{1}{2}x+o(x^2)\right) \\
&= e+\frac{e}{2}x+o(x^2)
\end{aligned}$$

Proposition 13

Lorsqu'on veut faire le développement limité d'un quotient, on se sert d'une composée avec le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ *ou* $\dfrac{1}{1-x}$.

Exemples :

E 1 – Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1+\ln(1+x)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\ln(1+x)} &= \frac{1}{1+x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)} \\
&= 1-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)+\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+o(x^2) \\
&= 1-x+\frac{1}{2}x^2+x^2+o(x^2) \\
&= 1-x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

E 2 – Déterminer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{1+x}} &= \frac{1}{1+1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}+o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}+o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\dfrac{x}{4}-\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{x^3}{32}+o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}\right)+\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}\right)^2-\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}\right)^3\right)+o(x^3) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}-\frac{5}{64}x^3\right)+o(x^3) \\
&= \frac{1}{2}-\frac{x}{8}+\frac{x^2}{16}-\frac{5}{128}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

16.3.5 Comportement local et DL

Proposition 14

Si f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0,

$$f(x) = a + b(x - x_0) + o((x - x_0))$$

alors f est dérivable en x_0 et $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.
Dans ce cas, l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc le terme $y = a + b(x - x_0)$ et pour connaître la position de la courbe par rapport à la tangente, il suffit de regarder le signe du terme suivant du développement limité.

Exemple :

Calculons le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{1 + 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12}\right)^3\right) + o(x^3) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{x}{4}}_{\text{eq. de la tangente}} + \underbrace{\frac{x^3}{48}}_{\text{donne position de la tangente}} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Donc la courbe représentative de f admet en 0 une tangente d'équation $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}$.

De plus, on a $f(x) - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x^3}{48} + o(x^3)$, donc au voisinage de 0, la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $\dfrac{x^3}{48}$.
Pour $x < 0$, la courbe est en-dessous de la tangente, et pour $x > 0$, la courbe est au-dessus de la tangente.