
Dérivation sur un intervalle

13.1 Fonctions de classe C^n sur un intervalle

13.1.1 Classe d'une fonction

Définition 1

Soient E et F deux ensembles. On note l'ensemble de toutes les applications de E dans F :

$$F^E = \{f : E \rightarrow F\}$$

Exemples :

- E1** – $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}
- E2** – $\mathbb{R}^{[0,+\infty[}$ désigne l'ensemble des fonctions de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R}
- E3** – $(\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{R}}$ désigne l'ensemble des fonctions strictement positives
- E4** – $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites réelles.

Définition 2

On appelle **dérivée n -ième de f** l'action de dérivée n fois la fonction f :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad \forall n \geq 1, \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})' = (f')^{(n-1)}$$

Une fonction f est n -fois dérivable sur I si elle est $(n - 1)$ -fois dérivable sur I et si la fonction $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I .

Définition 3

On note :

- $\mathcal{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions **continues sur I** .
- $\mathcal{C}^1(I)$ est l'ensemble des fonctions **continûment dérivables sur I** , i.e. l'ensemble des fonctions qui sont dérivables sur I dont la fonction dérivée f' est continue sur I .
- $\mathcal{C}^n(I)$ est l'ensemble des fonctions **n fois continûment dérivables sur I** , i.e. l'ensemble des fonctions n -fois dérivables sur I dont la fonction dérivée n -ième $f^{(n)}$ est continue sur I ;
- $\mathcal{C}^\infty(I)$ est l'ensemble des **fonctions indéfiniment dérivables sur I**

Remarque :

On a les inclusions suivantes : $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I) \subset \mathbb{R}^I$

13.1.2 Dérivées n -ièmes usuelles**Fonctions Polynômes****Proposition 4**

Notons pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f_0 : x \mapsto x^n, \quad \text{et} \quad f_a : x \mapsto (x - a)^n$$

Les fonctions f_0 et f_a sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_0^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_a^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Remarque :

Les fonctions polynomiales sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Si P est un polynôme tel que $\deg(P) = n$, alors

$$\deg(P^{(k)}) = \begin{cases} n - k & \text{si } k \leq n \\ -\infty & \text{si } k > n \end{cases}$$

Fonctions inverse**Proposition 5**

Notons pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f_0 : x \mapsto \frac{1}{x}, \quad \text{et} \quad f_a : x \mapsto \frac{1}{x - a}$$

Les fonctions f_0 et f_a sont de classe \mathcal{C}^∞ là où elles sont définies et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f_0^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}, f_a^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x - a)^{k+1}}$$

Démonstration :

Montrons-le par récurrence :

$$n = 0 : f_a \text{ est } 0\text{-fois dérivable sur } I \text{ et } \forall x \in I, f_a(x) = \frac{(-1)^0 0!}{(x-a)^{0+1}}.$$

Soit $n \geq 0$. On suppose la propriété vraie au rang n .

Posons $f^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$ qui est dérivable sur I puisque $x \mapsto (x-a)^{n+1}$ l'est et n'est jamais nulle, donc f est bien $(n+1)$ -fois dérivable sur I et

$$\forall x \in I, f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \times \frac{-(n+1)}{(x-a)^{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(x-a)^{n+2}}$$

Remarque :

La fonction $g_a : x \mapsto \frac{1}{a-x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]a, +\infty[$ et sur $] -\infty, a[$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_a^{(n)}(x) = \frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$$

Fonctions exponentielles et logarithmes**Proposition 6**

La fonction exponentielle est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exp^{(n)}(x) = \exp(x)$$

La fonction \ln est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$$

Fonctions trigonométriques**Proposition 7**

Les fonctions sinus, cosinus, tangente, sont de classe \mathcal{C}^∞ sur tout intervalle où elles sont définies. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

13.1.3 Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^n

Proposition 8

Stabilité par combinaison linéaire

L'ensemble $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^I .
Autrement dit, si f et g sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle I , alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + g)$ est encore une fonction de classe \mathcal{C}^n et de plus :

$$(\alpha f + g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + g^{(n)}$$

Proposition 9

Formule de Leibniz

Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle I , alors le produit (fg) est encore de classe \mathcal{C}^n et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Proposition 10

Soient I et J deux intervalles et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$.
Si f est de classe \mathcal{C}^n sur I , et si g est de classe \mathcal{C}^n sur J , alors $g \circ f$ est de classe \mathcal{C}^n .

Remarques :

R1 – Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f_\alpha = x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$$

R2 – Pour $a > 0$, la fonction $f_a : x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_a^{(n)}(x) = (\ln(a))^n a^x$$

R3 – Si f et g sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle I et si g ne s'annule pas sur l'intervalle I , alors la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est de classe \mathcal{C}^n sur l'intervalle I .

13.1.4 Théorème Limite de la Dérivée

Théorème 11

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ mais de classe \mathcal{C}^n a priori uniquement sur $[a, b[$.
Si la fonction $f^{(n)}$ admet une limite finie ℓ en b , alors f est de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$ et $f^{(n)}(b) = \ell$.

Proposition 12

Soit I un intervalle et soit $a \in I$.
Soit f une fonction continue sur I (donc en a) et de classe \mathcal{C}^1 sur $I \setminus \{a\}$.
Si f' admet une limite finie en a , alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$$

Remarque :

Attention, la continuité en a est importante

13.2 Théorèmes de dérivabilité

13.2.1 Condition nécessaire d'extremum local

Définition 13

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On dit que f admet un **maximum local en x_0** s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I, f(x) \leq f(x_0)$$

On dit que f admet un **minimum local en x_0** s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I, f(x) \geq f(x_0)$$

Un **extremum local** est un minimum ou maximum local.

Théorème 14

Condition nécessaire d'extremum local

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit x_0 un point intérieur de I (i.e. qui n'est pas sur les bords de l'intervalle).

$$\text{Si } f \text{ possède un extremum local en } x_0, \text{ alors } f'(x_0) = 0$$

autrement dit, il est nécessaire que $f'(x_0) = 0$ pour que f possède un extremum local en x_0 .

Remarque :

Si l'extremum est situé sur l'extrémité x_0 de l'intervalle I , rien n'impose alors que $f'(x_0) = 0$

13.2.2 Théorème de Rolle

Théorème 15

Théorème de Rolle

Soient a et b deux réels avec $a < b$.

Soit f une fonction de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- f continue sur $[a, b]$
- f dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration :

On sait que f est continue sur $[a, b]$, donc f bornée et atteint ses bornes.

Notons $M = \sup_{[a, b]} f = f(c)$ et $m = \inf_{[a, b]} f = f(d)$.

1er cas : $m = M$, alors $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M = m$, donc $f(x) = m$. Ainsi f est constante sur $[a, b]$, d'où $\forall c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

2ème cas : $m < M$. On a alors $m < f(a)$ ou $f(a) < M$ (car sinon $m \geq f(a)$ et $f(a) \geq M$, on aurait $M \leq f(a) \leq m < M$: absurde).

Supposons par exemple que $m < f(a) = f(b)$, i.e. $f(d) < f(a) = f(b)$.

Donc d est un point intérieur de $[a, b]$, f est dérivable en d , f admet un extremum en d , donc on a $f'(d) = 0$.

13.2.3 Théorème des Accroissements Finis

Théorème 16

Théorème des Accroissements Finis

Soient a et b deux réels avec $a < b$.

Soit f une fonction de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- f continue sur $[a, b]$
- f dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou autrement dit, il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Démonstration :

Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) - f(a) - K(x - a)$ où K est une constante réelle choisie pour que $\varphi(b) = 0$.

K existe et est unique, puisque $K = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a :

- φ est continue sur $[a, b]$ car f l'est
- φ est dérivable sur $]a, b[$ car f l'est
- $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Donc (Théorème de Rolle), il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, i.e. $f'(c) - K = 0$.

D'où $K = f'(c)$, i.e. $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Conséquences 17

Inégalité des Accroissements Finis

Soient a et b deux réels avec $a < b$.

Soit f une fonction de $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- f continue sur $[a, b]$
- f dérivable sur $]a, b[$
- il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$

Alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Conséquences 18

Inégalité des Accroissements Finis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et s'il existe $K > 0$ tel que

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq K$$

alors pour tous $x, y \in I$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

13.2.4 Variations des fonctions

Théorème 19

Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est constante sur $I \iff f' = 0$ sur I
- f est croissante sur $I \iff f' \geq 0$ sur I
- f est décroissante sur $I \iff f' \leq 0$ sur I

Démonstration :

Montrons l'équivalence pour f est croissante sur $I \iff f' \geq 0$ sur I

\Rightarrow Supposons que f est croissante sur I . Alors :

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I \setminus \{x_0\}, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Lorsque $x \rightarrow x_0$, f étant dérivable en x_0 on obtient en passant à la limite dans l'inégalité :

$$f'(x_0) \geq 0$$

\Leftarrow Soient $a \leq b$, deux réels de I . La fonction f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, donc

$$\exists c \in]a, b[/ f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \geq 0 \implies f(a) \leq f(b)$$

donc f est croissante sur I .

Remarque :

Soit f une fonction dérivable sur I .

- Si $f' > 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors la fonction f est strictement croissante.
- Si $f' < 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors la fonction f est strictement décroissante.

13.3 Convexité d'une fonction

Définition 20

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle I .

On dit que f est **convexe sur I** si une des propositions suivantes (équivalentes) est vérifiée :

- la courbe de f est au-dessus de toutes ses tangentes
- la fonction f' est croissante sur I
- la fonction f'' est positive sur I

Définition 21

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle I .

On dit que f est **concave sur I** si $-f$ est une fonction convexe sur I , autrement dit si une des propositions suivantes (équivalentes) est vérifiée :

- la courbe de f est en-dessous de toutes ses tangentes
- la fonction f' est décroissante sur I
- la fonction f'' est négative sur I

Remarque :

Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur I , et si f'' s'annule en un point x_0 en changeant de signe, alors la fonction f change de convexité au point x_0 . Le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ est alors appelé un **point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f** .

Un point d'inflexion est donc un point où la courbe \mathcal{C}_f traverse sa tangente.

Théorème 22*Inégalités de convexité*

La fonction exponentielle est une fonction convexe sur \mathbb{R} et sa courbe est en particulier située au-dessus de sa tangente en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$$

La fonction logarithme népérien est une fonction concave sur $]0, +\infty[$ et sa courbe est en particulier située en-dessous de sa tangente en 1 :

$$\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$$

ou autrement dit

$$\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$$