

Applications linéaires

Dans tout le chapitre, E et F sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels.

12.1 Définitions

Définition 1

Une application f de E dans F est appelée une **application linéaire** si :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Exemples :

E1 – La fonction réelle $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{matrix}$ est-elle linéaire ?

On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda x + y) = a(\lambda x + y) = \lambda ax + ay = \lambda f(x) + f(y)$$

La fonction f est donc linéaire.

E2 – La fonction réelle $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & x^2 \end{matrix}$ est-elle linéaire ?

On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda x + y) = (\lambda x + y)^2 = \lambda^2 x^2 + y^2 + 2xy, \quad \lambda f(x) + f(y) = \lambda x^2 + y^2$$

La fonction f n'est donc pas linéaire.

Remarque :

Les fonctions linéaires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont uniquement les fonctions dont la courbe représentative est une droite passant par 0.

Exemples :

E1 – Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (2x - y; x + y + z)$. L'application f est-elle linéaire ?
 Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, soit $\vec{v} = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) &= f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) \\ &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (2(\lambda x + x') - (\lambda y + y'); (\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z')) \\ &= (\lambda(2x - y) + (2x' - y'); \lambda(x + y + z) + (x', y', z')) \\ &= \lambda(2x - y; x + y + z) + (2x' - y', x' + y' + z') \\ &= \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \end{aligned}$$

E2 – L'application $\frac{E}{\vec{u}} \rightarrow \frac{F}{\vec{0}_E}$, appelée **application nulle de F** (qui envoie tout vecteur de E sur le vecteur nul) est une application linéaire.

E3 – L'application $Id_E : \frac{E}{\vec{u}} \rightarrow \frac{E}{\vec{u}}$, appelée l'**application identité de E** , est une application linéaire.

Définition 2

- Une application linéaire qui va de E dans E est appelée un **endomorphisme de E** .
On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E (au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$).
- Une application linéaire qui va de E dans F , qui en plus est bijective, est appelé un **isomorphisme**
- Une application de E dans E qui est à la fois un endomorphisme et un isomorphisme (i.e. linéaire de E dans E et bijective) est appelée un **automorphisme de E**

Remarque :

Les applications linéaires ne sont pas forcément des fonctions, pour montrer le caractère bijectif, on ne peut pas regarder de "continuité + stricte monotonie" cela n'a pas de sens. On revient à la définition : injective et surjective.

Proposition 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

1. On a toujours $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.
2. On a $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$, $f(\vec{u} - \vec{v}) = f(\vec{u}) - f(\vec{v})$
3. On a $f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(\vec{u}_k)$

Démonstration :

Par exemple, $f(\vec{0}_E) = f(-\vec{x} + x) = -f(\vec{x}) + f(x) = \vec{0}_F$.

12.2 Noyau et image

12.2.1 Noyau d'une application linéaire

Définition 4

Soit f une application linéaire de E dans F .

On appelle **noyau de f** , notée $\text{Ker}(f)$, l'ensemble des antécédants de $\vec{0}_F$ dans E par f :

$$\text{Ker}(f) = \{ \vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \vec{0}_F \}$$

Remarques :

R1 – $\text{Ker}(f)$ est toujours inclus dans l'ensemble de départ de f

R2 – On a donc, pour tout $\vec{u} \in \text{Ker}(f)$, $f(\vec{u}) = \vec{0}_F$.

Proposition 5

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration :

- $\text{Ker}(f) \subset E$ par définition.
- On sait déjà que $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$, donc $\vec{0}_E \in \text{Ker}(f)$: $\text{Ker}(f) \neq \emptyset$
- Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \text{Ker}(f)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. A-t-on encore $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \text{Ker}(f)$?

$$f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \lambda\vec{0}_F + \vec{0}_F = \vec{0}_F$$

donc $\text{Ker}(f)$ est bien stable par combinaison linéaire.

Proposition 6

Soit f une application linéaire de E dans F . Alors :

$$f \text{ injective} \iff \text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$$

Démonstration :

\Rightarrow Supposons f injective : $\forall \vec{x}, \vec{x}' \in E$, si on a $f(\vec{x}) = f(\vec{x}')$, alors on a nécessairement $\vec{x} = \vec{x}'$.

Montrons que $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$.

L'inclusion $\{\vec{0}_E\} \subset \text{Ker}(f)$ est toujours vraie (puisque $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E)

A-t-on $\text{Ker}(f) \subset \{\vec{0}_E\}$?

Soit $\vec{u} \in \text{Ker}(f)$, autrement dit $f(\vec{u}) = \vec{0}_F = f(\vec{0}_E)$, donc puisque f est injective, on a $\vec{u} = \vec{0}_E$, donc $\text{Ker}(f) \subset \{\vec{0}_E\}$.

\Leftarrow Supposons que $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$.

Montrons que f est injective.

Soient \vec{x}, \vec{x}' deux vecteurs de E tels que $f(\vec{x}) = f(\vec{x}')$. On a alors

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}') = \vec{0}_F \implies f(\vec{x} - \vec{x}') = \vec{0}_F \implies \vec{x} - \vec{x}' \in \text{Ker}(f) \implies \vec{x} - \vec{x}' = \vec{0}_E \implies \vec{x} = \vec{x}'$$

12.2.2 Image d'une application linéaire

Définition 7

Soit f une application linéaire de E dans F .

On appelle **Image de f** , notée $\text{Im}(f)$, l'ensemble des images de tous les vecteurs de E dans l'ensemble F :

$$\text{Im}(f) = \{ \vec{y} \in F / \exists \vec{x} \in E / \vec{y} = f(\vec{x}) \}$$

Remarques :

- R1** – On a donc $\text{Im}(f) = f(E)$: c'est l'image directe de E par l'application f
- R2** – Pour tout vecteur $\vec{v} \in \text{Im}(f)$, on peut dire que : $\exists \vec{u} \in E / \vec{v} = f(\vec{u})$
- R3** – $\text{Im}(f)$ est donc finalement l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire " $f(\text{quelque chose})$ ".

Proposition 8

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration :

- $\text{Im}(f) \subset F$ par définition.
- On sait déjà que $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$, donc $\vec{0}_F$ est l'image d'un vecteur de E par l'application f , donc $\vec{0}_F \in \text{Im}(f)$: $\text{Im}(f) \neq \emptyset$
- Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \text{Im}(f)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. A-t-on encore $\lambda \vec{u} + \vec{v} \in \text{Im}(f)$?
On sait que $\vec{u} \in \text{Im}(f) : \exists \vec{x} \in E / \vec{u} = f(\vec{x})$.
On sait que $\vec{v} \in \text{Im}(f) : \exists \vec{y} \in E / \vec{v} = f(\vec{y})$.

Alors

$$\lambda \vec{u} + \vec{v} = \lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = f(\lambda \vec{x} + \vec{y}) \in \text{Im}(f)$$

donc $\text{Im}(f)$ est bien stable par combinaison linéaire.

Proposition 9

Soit f une application linéaire de E dans F . Alors :

$$f \text{ surjective} \iff \text{Im}(f) = F$$

Proposition 10

Soit f une application linéaire de E dans F . Alors :

$$\text{si } E = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n), \quad \text{alors } \text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n))$$

Démonstration :

Supposons que $E = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.

Montrons que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n))$.

L'inclusion $\text{Vect}(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n)) \subset \text{Im}(f)$ est évidente, puisque chacun des $f(\vec{u}_i)$ est dans $\text{Im}(f)$, et que $\text{Im}(f)$ est stable par combinaison linéaire, donc le Vect est bien encore inclus dans $\text{Im}(f)$.

Réciproquement, si on prend $\vec{y} \in \text{Im}(f)$, alors il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = f(\vec{x})$.

Or, $E = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$, donc \vec{x} peut s'écrire $\vec{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Ainsi :

$$\vec{y} = f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(\vec{u}_k) \in \text{Vect}(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_n))$$

On a donc bien montré que $\text{Im}(f) \subset \text{Vect}(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n))$, d'où l'égalité entre les deux ensembles.

12.2.3 Théorème du rang

Définition 11

Soit f une application linéaire de E dans F . On appelle **rang de f** la dimension de $\text{Im}(f)$, lorsque cette dimension existe bien :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

Théorème 12

Théorème du rang

Soit f une application linéaire de E dans F .

On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie. Alors, on a :

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$$

autrement dit :

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(E)$$

12.3 Isomorphismes en dimension finie

Proposition 13

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff \text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\} \\ &\iff \dim(\text{Ker}(f)) = 0 \\ &\iff \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) \\ &\iff \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) \text{ (par théorème du rang)} \\ &\iff \dim(\text{Im}(f)) = \dim(F) \\ &\iff \text{Im}(f) = F \text{ car } \text{Im}(f) \subset F \text{ et égalité des dimensions} \\ &\iff f \text{ surjective} \end{aligned}$$

Remarque :

On utilise souvent ce résultat pour les endomorphismes en dimension finie :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}_E\}$, alors f est injective, et donc également surjective, et donc bijective et c'est un isomorphisme de E dans E .

Proposition 14

Soit $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ une famille libre de E .

Si f est une application linéaire injective de E dans F , alors $(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n))$ est une famille libre de F .

Démonstration :

Supposons que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ soit une famille libre de E .

Prenons $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application injective.

Montrons que $(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), \dots, f(\vec{u}_n))$ est une famille libre de F .

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f(\vec{u}_k) = \vec{0}_F$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k f(\vec{u}_k) = \vec{0}_F &\implies f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k\right) = \vec{0}_F \quad (\text{car } f \text{ linéaire}) \\ &\implies \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k \in \text{Ker}(f) \\ &\implies \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{u}_k = \vec{0}_E \quad (\text{car } f \text{ injective}) \\ &\implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k = 0 \quad (\text{car } (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \text{ libre}) \end{aligned}$$

Proposition 15

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Si f est un isomorphisme de E dans F , alors l'image de toute base de E par f est une base de F .
2. Si l'image d'une base de E par f est une base de F , alors f est un isomorphisme de E dans F .

Démonstration :

1. Supposons f est un isomorphisme de E dans F et prenons une base \mathcal{B} de E .

Puisque f est injective et que \mathcal{B} est libre, on sait que $f(\mathcal{B})$ est une famille libre de F .

De plus, \mathcal{B} est génératrice de E , donc $f(\mathcal{B})$ est génératrice de $\text{Im}(f)$, donc de F puisque f surjective.

Ainsi, $f(\mathcal{B})$ est une base de F .

2. Supposons que \mathcal{B} soit une base de E telle que $f(\mathcal{B})$ soit aussi une base de F .

Puisque $\text{Card}(\mathcal{B}) = \text{Card}(f(\mathcal{B}))$, les espaces E et F sont de même dimension. De plus, puisque $f(\mathcal{B}) = \text{Im}(f) = F$, on a f surjective, et donc f est également injective. Donc f est un isomorphisme.