

Systemes lineaires

9.1 Vocabulaire

Définition 1

Une **équation linéaire** à p inconnues x_1, x_2, \dots, x_p est une équation du type

$$a_1x_1 + \dots + a_px_p = b$$

avec a_1, a_2, \dots, a_p, b des éléments de \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

Un **système linéaire** de n équations linéaires à p inconnues est constitué de p équations du type précédent. On le note habituellement de la façon suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Autrement dit, on note a_{ij} le coefficient de l'inconnue x_j dans la i -ième équation.

Remarques :

R1 – **Résoudre** un système de n équations à p inconnues revient à déterminer tous les p -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant simultanément les n équations du système.

R2 – Quand on donne les solutions d'un système, il est très important de donner le n -uplet dans le "bon ordre".

Par exemple, pour le système

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

le couple $(2, 1)$ est solution, mais pas le couple $(1, 2)$. On a :

$$\mathcal{S} = \{(2, 1)\}$$

Définition 2

Un système est **incompatible** s'il n'admet aucune solution.

Un système est appelé un **système de Cramer** s'il admet exactement une solution.

Exemples :

E1 – Le système d'équations :

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

est un système incompatible.

E2 – Le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

n'admet qu'une solution : le couple (2, 1). C'est donc un système de Cramer.

E3 – Il existe des systèmes admettant une infinité de solutions. Par exemple :

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -4x + 2y = -4 \end{cases}$$

Les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes. On peut seulement exprimer y en fonction de x (ou le contraire) :

$$y = 2x - 1$$

et donc

$$\mathcal{S} = \{(x, 2x - 1), x \in \mathbb{K}\}$$

Définition 3

Un système linéaire est **triangulaire** s'il est de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad \quad \quad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \ddots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad a_{nn}x_n + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Remarque :

La formule du système triangulaire dépend en fait des valeurs de p et n , mais dans tous les cas un système triangulaire est un système facile à résoudre.

Exemples :

E1 – Si $n = p$.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -5 \\ \quad \quad 5y + z = 8 \\ \quad \quad \quad \quad -2z = 4 \end{cases}$$

Il suffit de "remonter le système pour obtenir les valeurs des inconnues l'une après l'autre : $z = -2$, donc $5y = 8 - z = 10$, d'où $y = 2$, puis $2x = -5 + y - 3z = -6$, donc $x = -3$. On obtient une solution unique $\mathcal{S} = \{(-3, 5, -2)\}$.

Lorsqu'on a un système triangulaire carré ($n = p$), on aura la plupart du temps un système de Cramer.

E2 – Si $n > p$.

C'est encore plus simple puisque les dernières équations ont un membre de gauche nul. Soit le membre de droite y est également nul et on peut oublier l'équation, soit ce n'est pas le cas et le système est incompatible, par exemple :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -5 \\ 5y + z = 8 \\ -2z = 4 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

E3 – Si $n < p$

Le système triangulaire aura nécessairement une infinité de solutions qu'on va pouvoir exprimer en fonction des dernières inconnues en remontant le système comme dans les autres cas :

$$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$$

A l'aide de la deuxième équation, on obtient $y = 4 - 2z$, puis $x = -2 + 2y - z = 6 - 5z$, soit

$$\mathcal{S} = \{(6 - 5z, 4 - 2z, z), z \in \mathbb{K}\}$$

9.2 Résolution des systèmes

9.2.1 Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 4

Deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

Définition 5

Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système linéaire sont de trois types :

- on peut échanger des lignes i et j :

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

- on peut multiplier une ligne par un réel non nul :

$$L_i \longleftarrow aL_i, \quad (a \neq 0)$$

- on peut rajouter à une ligne autant de fois qu'on veut une autre ligne :

$$L_i \longleftarrow L_i + bL_j, \quad (b \in \mathbb{K})$$

Remarque :

On combine souvent les deux derniers types d'opérations élémentaires pour faire des opérations du type $L_i \longleftarrow aL_i + bL_j$ avec $a \neq 0$

Proposition 6

Les opérations élémentaires sur les lignes transforment un système linéaire en un système équivalent

9.2.2 Pivot de Gauss

Proposition 7

On peut toujours transformer un système linéaire quelconque en un système triangulaire en procédant de la façon suivante :

- Si besoin, on échange la ligne L_i avec une ligne L_j sur laquelle le coefficient a_{i1} est non nul.
- A l'aide de combinaisons du type $L_i \leftarrow aL_i + bL_1$, on annule tous les coefficients a_{i1} pour $i \geq 2$.
- On recommence ceci sur le sous-système formé des $n - 1$ dernières lignes (et ne contenant donc plus que $p - 1$ inconnues).

Exemple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{3x} + y - 3z + 2t = 7 \\ x - 2y + z - t = -9 \\ 2x - 3y - 2z + t = -4 \\ -x \quad \quad + 5z - 3t = -11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{3x} + y - 3z + 2t = 7 \\ \quad - 7y + 6z - 5t = -34 \\ \quad - 11y \quad \quad - t = -26 \\ \quad \quad y + 12z - 7t = -26 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 + L_1 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + y - 3z + 2t = 7 \\ \quad \quad \boxed{-7y} + 6z - 5t = -34 \\ \quad \quad \quad - 66z + 48t = 192 \\ \quad \quad \quad \quad 90z - 54t = -216 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow 7L_3 - 11L_2 \\ L_4 \leftarrow 7L_4 + L_2 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + y - 3z + 2t = 7 \\ \quad - 7y + 6z - 5t = -34 \\ \quad \quad \quad \boxed{-66z} + 48t = 192 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 756t = 3024 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_4 \leftarrow 66L_4 + 90L_3 \end{array}$$

En remontant le système, on obtient $t = 4$, puis $-66z = 192 - 48t = 0$, donc $z = 0$. Puis $7y = 34 + 6z - 5t = 14$, donc $y = 2$, et enfin $3x = 7 - y + 3z - 2t = -3$, donc $x = -1$. Le système a donc une unique solution

$$\mathcal{S} = \{(-1, 2, 0, 4)\}$$

Les calculs étaient fastidieux pour une solution assez simple ...

En fait, si on choisissait d'autres pivots, on aurait pu simplifier les calculs.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + y - 3z + 2t = 7 \\ x - 2y + z - t = -9 \\ 2x - 3y - 2z + t = -4 \\ -x \quad \quad + 5z - 3t = -11 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2y + z - t = -9 \\ 3x + y - 3z + 2t = 7 \\ 2x - 3y - 2z + t = -4 \\ -x \quad \quad + 5z - 3t = -11 \end{array} \right. \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} - 2y + z - t = -9 \\ \quad \quad 7y - 6z + 5t = 34 \\ \quad \quad \quad y - 4z + 3t = 14 \\ \quad \quad - 2y + 6z - 4t = -20 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 x - 2y + z - t = -9 \\
 y - 4z + 3t = 14 \\
 7y - 6z + 5t = 34 \\
 -2y + 6z - 4t = -20
 \end{array} \right. \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 x - 2y + z - t = -9 \\
 \boxed{y} - 4z + 3t = 14 \\
 - 22z - 16t = -64 \\
 - 2z + 2t = 8
 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l}
 L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \\
 L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2
 \end{array} \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 x - 2y + z - t = -9 \\
 y - 4z + 3t = 14 \\
 - \boxed{22z} - 16t = -64 \\
 + 6t = 24
 \end{array} \right. \quad L_4 \leftarrow 11L_4 + L_3
 \end{array}$$

On retrouve évidemment la même solution que tout à l'heure.