CHAPITRE 7

Bijections et continuité

7.1 Images et antécédants

7.1.1 Images directes et images réciproques

Définition 1

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.

- Soit A une partie de E. On appelle **image directe de A par l'application f** l'ensemble noté $f(A)$ défini par :

$$\boxed{f(A) = \{f(x) \ / \ x \in A\} = \{y \in F \ / \ \exists x \in E, y = f(x)\}}$$

c'est donc l'ensemble de toutes les images des éléments de A.
- Soit B une partie de F. On appelle **image réciproque de B par l'application f** l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par :

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}}$$

c'est donc l'ensemble de tous les antécédents possibles pour les éléments de B par l'application f.

Exemples :

E 1 – Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$. L'ensemble de départ de f est $\mathbb{R}^+$.
L'ensemble d'arrivée de f est $\mathbb{R}$.
Soit $A = [0, 3]$. Quelle est l'image de la partie A par f ?

$$\forall x \in [0,3],\ 0 \leqslant x \leqslant 3 \Longleftrightarrow 1 \leqslant x+1 \leqslant 4 \Longleftrightarrow 1 \leqslant \sqrt{x+1} \leqslant 2$$

Ainsi, l'ensemble des images des éléments de $[0, 3]$ est l'ensemble $[1, 2]$. On a donc

$$f([0,3]) = [1,2]$$

Soit $B = [2, 5]$ qui est bien une partie de $\mathbb{R}$. Quelle est l'image réciproque de la partie B par f ?

$$2 \leqslant \sqrt{x+1} \leqslant 5 \Longleftrightarrow 4 \leqslant x+1 \leqslant 25 \Longleftrightarrow 3 \leqslant x \leqslant 24$$

Donc l'ensemble des x qui ont pour image un élément de $[2,5]$ est exactement l'ensemble $[3,24]$. Donc

$$f^{-1}([2,5]) = [3,24]$$

Remarques :

R 1 – Attention, on peut écrire $f(x)$: c'est l'image de l'élément x. Mais on n'écrit jamais $f^{-1}(x)$: cela ne représenterait pas l'image réciproque de l'élément x. Il faut écrire $f^{-1}(\{x\})$ pour avoir l'ensemble des antécédents possibles pour x.

7.1.2 Applications injectives

Définition 2

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
On dit que f est une **application injective** si tous les éléments de F admettent au plus un antécédent, i.e. ils en admettent un ou aucun.
Autrement dit,

$$\boxed{f \text{ injective } \Longleftrightarrow \forall x, x' \in E, \quad \text{si } f(x) = f(x'), \quad \text{alors } x = x'}$$

Proposition 3

*Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone sur I.
Alors f est une fonction injective.*

Démonstration :

Supposons par exemple que f soit strictement croissante sur I.
Soient $x, x' \in I$ tels que $f(x) = f(x')$.
Il nous faut montrer que $x = x'$.
Par l'absurde, si $x \neq x'$: il y a deux cas.

– si $x < x'$. Alors puisque f strictement croissante, $f(x) < f(x')$: impossible.
– si $x > x'$. Alors puisque f strictement croissante, $f(x) > f(x')$: impossible.

Ainsi, il n'est pas possible qu'on ait $x \neq x'$. Ainsi $x = x'$.

On a donc montré que $\forall x, x' \in I$, si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.

7.1.3 Applications surjectives

Définition 4

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
On dit que f est une **application surjective** si tous les éléments de F admettent au moins un antécédent.
Autrement dit,

$$\boxed{f \text{ surjective } \Longleftrightarrow \forall y \in F, \; \exists x \in E \; / \; y = f(x)}$$

Remarque :

On a également

$$f \text{ surjective } \Longleftrightarrow f(E) = F$$

7.1.4 Applications bijectives

Définition 5

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
On dit que f est une **application bijective** si tous les éléments de F admettent exactement un et un seul antécédent.
Autrement dit,

$$\boxed{f \text{ surjective } \iff \forall y \in F,\ \exists! x \in E \ /\ y = f(x)}$$

Remarque :

Soit $f : E \to F$ une application. Alors

$$f \text{ bijective} \quad \iff \quad \begin{cases} f \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{cases}$$

Définition 6

Si f est une bijection de E sur F, alors tout élément y de F admet un et un seul antécédent dans E. On définit ainsi une application de F dans E, appelée l'application réciproque, notée f^{-1}. On a alors

$$\forall (x, y) \in E \times F, \qquad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Remarques :

R 1 – Si f est une bijection de E sur F, alors f^{-1} est une bijection de F sur E et on a :

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

R 2 – Si f est une bijection de E dans F, f est donc inversible et son application réciproque est f^{-1}, autrement dit :

$$f^{-1} \circ f = Id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = Id_F$$

Proposition 7

Si f est une fonction injective de E dans F, alors f est une bijection de E dans $f(E)$.
Si f est strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f est une bijection de I sur $f(I)$.

7.2 Continuité

7.2.1 Définitions

Définition 8

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in D_f$. On suppose la fonction f définie au voisinage de x_0. On dit alors que **f est continue sur D_f** si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Définition 9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que **f est continue sur I** si f est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Proposition 10

Les fonctions usuelles :

- *les polynômes*
- *les fonctions rationnelles (quotient de deux polynômes*
- *la valeur absolue*
- *la racine carrée*
- *la fonction logarithme népérien*
- *les fonctions exponentielles*
- *les fonctions puissances*

sont toutes continues en tout point de leur ensemble de définition.

Remarques :

R 1 – Si f et g sont deux fonctions continues sur I,
- la somme $f + g$ est encore une fonction continue sur I
- le produit λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ est encore une fonction continue sur I
- le produit $f \times g$ est encore une fonction continue sur I

R 2 – Si f est continue sur I et si g est continue sur J avec $f(I) \subset J$, alors la composée $g \circ f$ est continue sur I.

7.2.2 Théorème des Valeurs Intermédiaires

Théorème 11

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
Autrement dit, si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est encore un intervalle.

Remarques :

R 1 – Les intervalles I et $f(I)$ peut être de natures différentes (ouvert, fermé, semi-ouvert, borné, non borné, ...)

R 2 – L'intervalle $f(I)$ peut être réduit à un singleton (la fonction f est constante).

Théorème 12 ***Théorème des valeurs intermédiaires***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soient $a, b \in I$ tels que

$$a < b \qquad \textit{et} \quad f(a) \neq f(b)$$

Alors f prend toutes les valeurs "intermédiaires" comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, i.e.

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \ (ou [f(b), f(a)]), \quad \exists x \in [a, b] \ / \ y = f(x)$$

Exemple :

Existence d'au moins une solution à l'équation $f(x) = 0$.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
S'il existe deux éléments $a, b \in I$, $a < b$ tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$ (i.e. $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés), alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Remarque :

L'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation $h(x) = 0$ avec $h = f - g$. On peut alors appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur la fonction $f - g$.

Théorème 13

Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

Remarque :

Autrement dit, sur un segment $[a, b]$, une fonction f aura toujours un maximum et un minimum.
De plus, on aura $f([a, b]) = \left[\min\limits_{x \in [a,b]} f(x), \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)\right]$.

Proposition 14

- *Si f est une fonction croissante et continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.*
- *Si f est une fonction décroissante et continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.*

7.2.3 Théorème de la bijection

Théorème 15 ***Théorème de la bijection***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si

- *f est continue sur I*
- *f est strictement monotone sur I*

Alors, f est une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$.
De plus, sa réciproque f^{-1} est également continue sur J et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.

Remarque :

Les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exemple :

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$, et si $f(a)f(b) \leqslant 0$ ($f(a)$ et $f(b)$ de signes opposés), alors l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[a, b]$.