

On désigne par  $\mathbb{K}$  soit l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ , soit l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ .

### 4.1 L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

#### 4.1.1 Définitions

##### Définition 1

On dit que  $P$  est un **polynôme de degré  $n$**  ( $n \in \mathbb{N}$ , à une indéterminée  $X$  et à coefficients dans  $\mathbb{K}$  s'il s'écrit sous la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i X^i$$

avec  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_i \in \mathbb{K}$  et  $a_n \neq 0$ .

Le coefficient  $a_i$  s'appelle le **coefficient d'indice  $i$** .

##### Remarques :

- R1** – Le degré de  $P$  que l'on note  $\deg(P)$  est le plus grand entier  $n$  tel que  $a_n \neq 0$ . Le coefficient  $a_n$  est alors appelé le **coefficient dominant**.
- R2** – Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls : on note également le polynôme nul par 0. Par convention,  $\deg(0) = -\infty$ .
- R3** – Un polynôme que n'a qu'un seul coefficient non nul est appelé un **monôme**.
- R4** – L'indéterminée  $X$  peut être substituée par :
  - des valeurs réelles  $x$  (on dit alors qu'on a une **fonction polynomiale**)
  - des valeurs complexes  $z$
  - des fonctions :  $u(\theta) = \cos(\theta)$ ,  $v(x) = e^x, \dots$
- R5** – On note  $\mathbb{K}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}[X]$  ou  $\mathbb{C}[X]$  si on sait dans quel corps se trouvent les coefficients).

**R6** – On note  $\mathbb{K}_n[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et de degré inférieur ou égal à  $n$  :

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] / \deg(P) \leq n\}$$

### Théorème 2

### Théorème d'identification

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et si leurs coefficients respectifs de même indice sont égaux.

$$\text{Si } P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k \text{ et } Q(X) = \sum_{k=0}^q b_k X^k,$$

$$P = Q \iff \begin{cases} p = q \\ \forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_i = b_i \end{cases}$$

## 4.1.2 Opérations

### Proposition 3

- La somme de deux polynômes est encore un polynôme. On additionne les coefficients de même degré. De plus,

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$$

- Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  : on dit que  $\lambda$  est un **scalaire** (un nombre). Alors si  $P$  est un polynôme,  $\lambda P$  est encore un polynôme et

$$\deg(P) = \deg(\lambda P) \quad \text{si } \lambda \neq 0$$

Plus généralement, pour tous  $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ , pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ,

$$\alpha P + \beta Q \in \mathbb{K}_n[X]$$

On dit que  $\mathbb{K}_n[X]$  est stable par combinaison linéaire.

- Le produit de deux polynômes est un polynôme. De plus,

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

### Remarques :

**R1** – Si  $\deg(P) \neq \deg(Q)$ , alors  $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$

**R2** – Si  $P(X) = a_p X^p + \dots + a_1 X + a_0$  (avec  $a_p \neq 0$ ) et  $Q(X) = b_q X^q + \dots + b_1 X + b_0$  (avec  $b_q \neq 0$ ), alors

$$P(X)Q(X) = c_{p+q} X^{p+q} + \dots + c_k X^k + \dots + c_1 X + c_0$$

avec

$$\forall k \in \llbracket 0, p+q \rrbracket, c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$$

(avec convention  $a_j = 0$  si  $j > p$  et  $b_j = 0$  si  $j > q$ .)

**R3** – Le coefficient dominant d'un produit de  $k$  polynômes est obtenu en multipliant les  $k$  coefficients dominants des polynômes.

**R4** – L'ensemble des polynômes est **intègre** : il vérifie :

$$P(X)Q(X) = 0 \iff P = 0 \text{ ou } Q = 0$$

De plus, on a donc

$$\begin{cases} A(X)P(X) = A(X)Q(X) \\ A(X) \neq 0 \end{cases} \implies P = Q$$

### 4.1.3 Dérivation

#### Définition 4

Soit  $P$  un polynôme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

On définit son **polynôme dérivé**, noté  $P'$  par

$$P'(X) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$

#### Remarques :

**R1** – Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le polynôme dérivé de  $X^n$  est donc  $nX^{n-1}$

**R2** – Le polynôme dérivé d'un polynôme constant (éventuellement nul) est le polynôme nul.

**R3** – Pour tous  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ , pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,

$$(P + Q)' = P' + Q', \quad (\lambda P)' = \lambda P', \quad (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$$

**R4** – Pour tous  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ , on a

$$(PQ)' = P'Q + PQ'$$

**R5** – Pour tous  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ , on a

$$(P \circ Q)' = P' \circ Q \times Q'$$

#### Proposition 5

Un polynôme est indéfiniment dérivable. On écrit  $P^{(k)}$  le polynôme obtenu quand on a dérivé successivement  $k$  fois le polynôme  $P$  :

$$P^{(0)} = P, \quad P^{(1)} = P', \quad \forall k \geq 1, \quad P^{(k)} = (P^{(k-1)})' = (P')^{(k-1)}$$

#### Exemple :

La dérivée  $k$ -ième du polynôme  $X^n$  est :

$$(X^n)^{(k)} = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)X^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

#### Remarque :

Si  $\deg(P) = n$ , alors pour tout  $k > n$ , on a  $P^{(k)} = 0$ .

## 4.2 Division dans $\mathbb{K}[X]$

### 4.2.1 Divisibilité

#### Définition 6

Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes de  $\mathbb{K}[X]$ . On dit que  $A$  **divise**  $B$  ou que  $B$  **est un multiple de**  $A$  s'il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tel que

$$B = AQ$$

On dit alors que  $B$  **est factorisable par**  $B$ .

#### Remarques :

**R1** – Si  $B = \lambda A$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on dit que  $A$  et  $B$  sont **proportionnels**.

**R2** – Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , on a

$$P = \frac{1}{\lambda}(\lambda P)$$

Ainsi, tous les polynômes constants non nuls  $Q = \mu = \frac{1}{\lambda}$  (avec  $\lambda \neq 0$ ) et les polynômes non nuls proportionnels à  $P : \lambda P(X)$ , sont des diviseurs de  $P$ .

**R3** – On dit que  $P$  est **irréductible** si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et les polynômes proportionnels à  $P$ . item Les polynômes de degré 0 et de degré 1 sont irréductibles.

### 4.2.2 Division euclidienne

#### Théorème 7

Soit  $A \in \mathbb{K}[X]$  et soit  $B \in \mathbb{K}[X]$  non nul. Alors il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

$Q$  est appelé le **quotient**, et  $R$  le **reste**, dans la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

#### Démonstration :

On admettra l'existence de l'écriture  $A = BQ + R$ .

Montrons l'unicité. Supposons qu'il existe  $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$  et  $(Q', R') \in \mathbb{K}[X]^2$  tels que

$$\begin{cases} A = BQ + R = BQ' + R' \\ \deg(R) < \deg(B) \\ \deg(R') < \deg(B) \end{cases}$$

On a donc  $B(Q - Q') = R' - R$ .

Supposons qu'on ait  $Q - Q' \neq 0$ . Alors, on aurait  $\deg(R' - R) = \deg(B(Q - Q')) = \deg(B) + \deg(Q - Q') \geq \deg(B)$ .

Or, on sait que  $\deg(R' - R) \leq \max(\deg(R'), \deg(R)) < \deg(B)$ . C'est contradictoire.

On a donc nécessairement  $Q - Q' = 0$ , et on en déduit alors que  $R - R' = 0$ .

#### Remarque :

Le polynôme  $B$  divise le polynôme  $A$  si et seulement si le reste de la division euclidienne de  $A$  par  $B$  est le polynôme nul.

### 4.2.3 Racines d'un polynôme

#### Définition 8

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et soit  $a \in \mathbb{K}$ . On dit que  $a$  est une **racine de  $P$**  si  $P(a) = 0$ .

#### Proposition 9

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et soit  $a \in \mathbb{K}$

$$P(a) = 0 \iff \exists! Q \in \mathbb{K}[X] / P(X) = (X - a)Q(X)$$

#### Démonstration :

On regarde la division euclidienne de  $P$  par  $X - a$  :

$$\exists!(Q, \alpha) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K} / P(X) = (X - a)Q(X) + \alpha$$

On prend en  $a$  : on a  $P(a) = 0 + \alpha$ , donc

$$P(X) = (X - a)Q(X) + P(a)$$

En particulier, le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $X - a$  est donc  $P(a)$ .

Ainsi,  $(X - a) | P$  si et seulement si  $P(a) = 0$ .

#### Remarques :

**R1** – Si on sait qu'on a une racine, on sait donc qu'on peut factoriser notre polynôme. Il peut donc être utile de chercher des racines évidentes.

**R2** – On peut généraliser le résultat à  $n$  racines distinctes :

$$P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_n) = 0 \iff \exists! Q \in \mathbb{K}[X] / P(X) = (X - a_1) \cdots (X - a_n)Q(X)$$

### 4.2.4 Racines multiples

#### Définition 10

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et soit  $a \in \mathbb{K}$ . On dit que  $a$  est une **racine multiple d'ordre  $k$  de  $P$**  si

$$(X - a)^k \text{ divise } P \quad \text{et} \quad (X - a)^{k+1} \text{ ne divise pas } P$$

Autrement dit,  $\exists! Q \in \mathbb{K}[X] / P(X) = (X - a)^r Q(X)$  avec  $Q(a) \neq 0$ .

#### Théorème 11

$$a \text{ racine d'ordre } k \text{ de } P \iff \begin{cases} P(a) = 0 \\ P'(a) = 0 \\ \vdots \\ P^{(k-1)}(a) = 0 \\ P^{(k)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

### 4.2.5 Décomposition dans $\mathbb{K}[X]$

#### Théorème 12

#### Théorème de D'Alembert

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  un polynôme non constant. Alors  $P$  admet toujours au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ . Plus généralement, Tout polynôme  $P$  de degré  $n$  dans  $\mathbb{C}[X]$  admet  $n$  racines complexes comptées avec multiplicité, et on peut écrire :

$$P(X) = \lambda(X - a_1)^{\alpha_1}(X - a_2)^{\alpha_2} \dots (X - a_p)^{\alpha_p}$$

avec  $\lambda \neq 0$  le coefficient dominant, et  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n$ .

#### Remarques :

**R1** – Les seuls polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont les polynômes de degré 0 et de degré 1.

**R2** – Tout polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

**R3** – Si  $P \in \mathbb{R}[X]$ , alors

$$\alpha \text{ racine de } P \iff \bar{\alpha} \text{ racine de } P$$

**R4** – Les seuls polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont les polynômes de degré 0, de degré 1, et les polynômes de degré 2 n'ayant pas de racines réelles.