CHAPITRE 2

Ensembles et dénombrement

2.1 Théorie des ensembles

2.1.1 Définitions

Définition 1

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des objets mathématiques. On forme alors l'**ensemble**

$$E = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$$

On dit alors que chaque u_i (pour $1 \leqslant i \leqslant p$) est **un élément** de l'ensemble E, ou autrement dit que u_i appartient à E et on écrit

$$u_i \in E$$

Exemples :

E 1 – $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels.

E 2 – $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.

Remarque :

Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. L'ordre des éléments n'est pas important. Ainsi, les ensembles :

$$\{1, 2\}, \qquad \{2, 1\}, \qquad \{1, 1, 2, 2, 2\}$$

sont en réalité le même ensemble au sens mathématique.

Définition 2

Le nombre d'éléments distincts d'un ensemble E est appelé le **cardinal** de E, on le note

$$Card(E)$$

Un ensemble est **fini** si son cardinal est un entier naturel, i.e. s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, on dit qu'il est **infini**.

Exemples :

- **E 1** – L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est un ensemble de cardinal 0.
- **E 2** – L'ensemble $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ est de cardinal 4.
- **E 3** – Pour tous entiers naturels m et n, on note si $m \leqslant n$:

$$[\![m, n]\!] = \{m, m+1, m+2, \ldots, n-1, n\}$$

et si $m > n$: $[\![m, n]\!] = \emptyset$.
- **E 4** – Si $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est fini et est de cardinal n.
- **E 5** – Si $m \leqslant n$, alors l'ensemble $[\![m, n]\!]$ est un ensemble fini de cardinal $n - m + 1$.

2.1.2 Parties d'un ensemble

Définition 3

Soient E et F deux ensembles. On dit que F **est inclus dans** E et on écrit

$$F \subset E$$

si tout élément de l'ensemble F est aussi un élément de l'ensemble E, i.e.

$$F \subset E \iff \forall x \in F,\ x \in E$$

Lorsque $F \subset E$, on dit que F est une **partie** ou un **sous-ensemble** de E.

Exemples :

- **E 1** – On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- **E 2** – Lorsqu'on a un ensemble E, il est courant de considérer un sous-ensemble F des éléments de E vérifiant une certaine propriété :

$$E = \mathbb{R}, \quad F = \{x \in E \ / \ x^2 - 5x + 4 < 0\}$$

Par exemple, on note

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}, \qquad \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}, \qquad \mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$$

Proposition 4

Soient E, F et G trois ensembles. Alors

1. $\emptyset \subset E$
2. $E \subset E$.
3. ***Transitivité*** *: si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.*
4. ***Double inclusion*** *:*

$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$$

Proposition 5

Soit E un ensemble fini et soit A un sous-ensemble de E.
Alors A est également un ensemble fini et $Card(A) \leqslant Card(E)$.
Si de plus, on a $Card(A) = Card(E)$, alors nécessairement $A = E$.

Définition 6

Pour tout ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble formé par toutes les parties de E.

Remarque :

> $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont chacun des éléments est un ensemble

2.1.3 Intersection et union d'ensembles

Définition 7

Soient E et F deux ensembles.

- On appelle **intersection de E et F**, notée $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément à E et à F.
- On appelle **union de E et F**, notée $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F, i.e. dans au moins un des deux ensembles.

Deux ensembles E et F vérifiant $E \cap F = \emptyset$ sont dits disjoints.

Proposition 8

La relation d'intersection est :

- ***commutative*** *: $A \cap B = B \cap A$*
- ***associative*** *: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$*
- *vérifie $A \cap A = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$*

La relation de réunion est :

- ***commutative*** *: $A \cup B = B \cup A$*
- ***associative*** *: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$*
- *vérifie $A \cup A = A$ et $A \cup \emptyset = A$*

L'intersection et la réunion vérifient :

- ***la distributivité de $\cap$ sur $\cup$*** *:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- ***la distributivité de $\cup$ sur $\cap$*** *:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Remarque :

> On peut généraliser ces notations : si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles, on note :
>
> - leur réunion $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, définie par
>
> $$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists i \in I \ / \ x \in A_i$$

- leur intersection $\bigcap_{i\in I} A_i$, définie par

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall i \in I,\ x \in A_i$$

Définition 9

Soit un ensemble E. Une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties non vides de E est appelée une **partition de E** si
(i) $\bigcup_{i\in I} A_i = E$
(ii) $\forall i, j \in I, i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Proposition 10 ***Formule de Poincaré***

Soient E, F deux ensembles finis. On a :

$$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$$

En particulier, si E et F sont disjoints, on a

$$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F)$$

Démonstration :

Si on ajoute $Card(E)$ et $Card(F)$, on compte deux fois les éléments de $E\cap F$. On doit donc retrancher $Card(E\cap F)$ pour obtenir le cardinal de $E \cup F$.

Proposition 11 ***Formule du Crible***

Soient E, F et G trois ensembles finis. Alors

$$Card(E\cup F\cup G) = Card(E)+Card(F)+Card(G)-Card(E\cap F)-Card(F\cap G)-Card(E\cap G)+Card(E\cap F\cap G)$$

Démonstration :

Si on ajoute $Card(E)$, $Card(F)$et $Card(G)$, on compte deux fois les éléments de $E \cap F$, deux fois ceux de $F \cap G$, deux fois ceux de $E \cap G$ et trois fois ceux de $E \cap F \cap G$. On doit donc retrancher $Card(E \cap F)$, $Card(F \cap G)$ et $Card(E \cap G)$ et on corrige donc le problème, sauf pour les éléments de $E \cap F \cap G$ qui ne sont plus comptés : il faut donc rajouter $Card(E \cap F \cap G)$.

2.1.4 Complémentaire d'une partie

Définition 12

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **complémentaire de A dans E**, et on note $E \setminus A$, (ou ${}^cA$ ou $\overline{A}$ si aucune confusion n'est possible) l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$E \setminus A = {}^cA = \overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

Proposition 13

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

1. ${}^cE = \emptyset$
2. ${}^c\emptyset = E$
3. ${}^c\left({}^cA\right) = A$
4. $({}^cA) \cap A = \emptyset$
5. $({}^cA) \cup A = E$
6. ${}^c(A \cup B) = ({}^cA) \cap ({}^cB)$
7. ${}^c(A \cap B) = ({}^cA) \cup ({}^cB)$

2.1.5 Produit cartésien d'ensembles

Définition 14

On appelle **produit cartésien** de n ensembles E_1, E_2, …, E_n, l'ensemble des suites finies :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n),\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n\}$$

En particulier, lorsque les E_i sont tous identiques, on le note simplement E^n.

Proposition 15

Si E et F sont deux ensembles finis, alors

$$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$$

Démonstration :

On pose $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $F = \{y_1, \dots, y_p\}$. On peut alors représenter tous les éléments du produit cartésien $E \times F$ sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

(x_1, y_1)	(x_1, y_2)	$\cdots$	(x_1, y_p)
(x_2, y_1)	(x_2, y_2)	$\cdots$	(x_2, y_p)
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
(x_n, y_1)	(x_n, y_2)	$\cdots$	(x_n, y_p)

ce qui démontre bien que $Card(E \times F) = n \times p = Card(E) \times Card(F)$.

Remarque :

De manière plus générale, si $E_1, \dots, E_n$ sont n ensembles finis, alors

$$Card(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = \prod_{k=1}^{n} Card(E_k)$$

En particulier, si E est un ensemble fini, alors

$$Card(E^n) = (Card(E))^n$$

2.2 Dénombrement

2.2.1 Dénombrement des p-listes

Définition 16

On appelle **p-liste** ou **p-uplet** d'un ensemble E tout élément de E^p, c'est-à-dire tout élément de la forme

$$(x_1, \dots, x_p), \text{ avec } \forall i \in [\![1, p]\!], x_i \in E$$

Théorème 17

Soit E un ensemble fini contenant n éléments. Alors, le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à n^p.

Démonstration :

Cela vient du fait que $Card(E^p) = (Card(E))^p$

Remarque :

On retiendra que l'on utilise les p-listes dans des problèmes de choix successifs de p éléments d'un ensemble, avec éventuelles répétitions

2.2.2 Arrangements et permutations

Définition 18

Soit E un ensemble et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **p-arrangement de E** ou **arrangement de p éléments de E** toute suite de p éléments distincts de E.
Si E contient n éléments, on note A_n^p le nombre d'arrangement à p éléments d'un ensemble à n éléments

Remarque :

Si $p > n$, il ne peut pas y avoir de p-arrangements dans l'ensemble E. On a alors $A_n^p = 0$.

Théorème 19

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \leqslant n$. Alors le nombre de p-arrangements A_n^p de l'ensemble E est égal à

$$A_n^p = \boxed{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

*où on a noté $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$, appelé **factorielle** n.*

Démonstration :

Pour dénombrer les p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ de E^p dont les éléments sont distincts deux à deux, :
- on commence par choisir x_1 parmi les n éléments de E
- puis on choisit x_2 parmi les $n-1$ éléments de E distincts de x_1
- puis on choisit x_2 parmi les $n-2$ éléments de E distincts de x_1 et x_2
- ...
- puis on choisit x_p parmi les $n-p+1$ éléments de E distincts de $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$.

Il y a donc bien $n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ p-arrangements de E.

Remarque :

> On retiendra que l'on utilise les arrangements dans les problèmes de choix succesifs de p éléments pris parmi n, sans répétition

Définition 20

Soit E un ensemble à n éléments. Un n-arrangement de E est appelé une **permutation de E**. Une permutation est donc un n-uplet constitué, dans un certain ordre, des n éléments de E.

Théorème 21

Soit E un ensemble à n éléments. Alors il y a $n!$ permutations de E. Autrement dit, il y a $n!$ façons de ranger n éléments distincts dans tous les ordres possibles.

Remarque :

> On retiendra que l'on utilise les permutations dans les problèmes où l'on veut ordonner tous les éléments d'un ensemble sans répétition

2.2.3 Combinaisons

Définition 22

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle **combinaison de p éléments de E** toute partie de E qui contient p éléments.
On note le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments :

$$\binom{n}{p}$$

qui se lit "p parmi n".

Remarques :

- **R 1** – Les éléments d'une combinaison de p éléments sont deux à deux distincts.
- **R 2** – Si $p > n$ ou si $p < 0$ on a $\binom{n}{p} = 0$
- **R 3** – L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.
- **R 4** – Les nombres $\binom{n}{p}$ sont appelés les **coefficients binomiaux**.
- **R 5** – On trouve parfois la notation C_n^p pour le coefficient binomial.

Théorème 23

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $0 \leqslant p \leqslant n$. Alors, le nombre de combinaisons de p éléments parmi un ensemble à n éléments est égal à

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\cdots 1}$$

Démonstration :

Il suffit de montrer que

$$A_n^p = p!\binom{n}{p}$$

Deux p-arrangements d'éléments de $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ont le même support si ils sont formés des mêmes éléments mais pas nécessairement dans le même ordre. On peut alors ranger tous les p-arrangements en catégories en mettant ensemble tous ceux qui ont le même support. On remarque alors que le nombre de catégories est $\binom{n}{p}$ et que chaque catégorie comporte $p!$ arrangements.

Remarque :

On retiendra que l'on utilise les combinaisons dans les problèmes de choix simultanés de p éléments choisis parmi n, sans considération d'ordre et sans répétition.

2.3 Coefficients binomiaux

2.3.1 Formule de symétrie

Théorème 24

Soient n et p deux entiers. Alors

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Démonstration :

Démonstration combinatoire :

En effet, chaque combinaison de p éléments de E peut être associée à une et unique partie de $n-p$ éléments de E : son complémentaire. Et réciproquement chaque combinaison de $n-p$ éléments de E est le complémentaire d'exactement une seule combinaison de p éléments. Les nombres de telles combinaisons sont donc les mêmes :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Démonstration calculatoire :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \binom{n}{n-p}$$

2.3.2 Formule de récurrence

Théorème 25

Soient n et p deux entiers plus grands que 1. Alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration :

Démonstration calculatoire :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)!}{p(p-1)!(n-1-(p-1))!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

2.3.3 Formule de Pascal

Théorème 26

Soient n et p deux entiers naturels. Alors

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration :

Démonstration combinatoire :

Soit $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de n élements. On sait que $\binom{n}{p}$ désigne l'ensemble des p-combinaisons choisies parmi E.

Partageons toutes ces p-combinaisons en deux parties :

- celles qui contiennent x_n : c'est la partie A
- celles qui ne contiennent pas x_n : c'est la partie B.

Les éléments de la partie A sont des p-combinaisons de E qui contiennent x_n. Il y en autant que de manières de choisir les $p-1$ éléments qui accompagnent x_n dans la p-combinaison : autrement dit, on doit choisir $p-1$ éléments parmi les $n-1$ éléments de $E \setminus \{x_n\}$. Ainsi

$$Card(A) = \binom{n-1}{p-1}$$

Les éléments de la partie B sont des p-combinaisons de E qui ne contiennent pas x_n. Il y en autant que de manières de choisir les p éléments dans la p-combinaison : autrement dit, on doit choisir p éléments parmi les $n-1$ éléments de $E \setminus \{x_n\}$. Ainsi

$$Card(B) = \binom{n-1}{p}$$

Comme (A, B) forme une partition de l'ensemble des p-combinaisons de E, on a

$$Card(E) = Card(A) + Card(B)$$

d'où le résultat.

Démonstration calculatoire :

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p)!}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p)} \times \frac{n}{p(n-p)} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!}
\end{aligned}$$

2.3.4 Formule de Vandermonde

Théorème 27

Soient n, m et p trois entiers naturels. Alors

$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$$

Démonstration :

Démonstration combinatoire :

Considérons un ensemble comportant $n+m$ éléments, disons n éléments $x_1, x_2, \dots, x_n$ qui forment un ensemble A et m éléments $y_1, y_2, \dots, y_m$ qui forment un ensemble B.

$\displaystyle\binom{n+m}{p}$ représente le nombre de p-combinaisons choisies parmi l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m\}$.

Partageons ces p-combinaisons en plusieurs groupes :

- Celles qui possèdent 0 élément de A et p éléments de B : il y en a exactement $\binom{n}{0}\binom{m}{p}$
- Celles qui possèdent 1 élément de A et $p-1$ éléments de B : il y en a exactement $\binom{n}{1}\binom{m}{p-1}$
- ...
- Celles qui possèdent p éléments de A et 0 élément de B : il y en a exactement $\binom{n}{p}\binom{m}{0}$.

Au final, on a donc bien

$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$$

2.3.5 Formule du binôme de Newton

Théorème 28

Soient a et b deux nombres réels et n un entier. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration :

Démonstration combinatoire :

On sait que

$$(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)$$

où le facteur $(a+b)$ apparaît exactement n fois.

En développant ce produit, on va obtenir une somme de produits de n facteurs, chacun étant choisi dans un des facteurs $(a+b)$. Chaque terme de la somme va donc être de la forme

$$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{k \text{ facteurs}} \times \underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{n-k \text{ facteurs}} = a^k b^{n-k}$$

où k est un entier compris entre 0 et n.

Chaque terme $a^k b^{n-k}$ va apparaître plusieurs fois dans la somme. Combien exactement ? Autant de fois qu'on pourra choisir k fois le terme a sur les n, autrement dit $\displaystyle\binom{n}{k}$ fois. On a donc

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration calculatoire :
Procédons par récurrence sur n.

- Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{P}(n)$: "$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
- $n = 0$. Alors
$$(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^{0-0}$$
donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons qu'alors la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie égalemement, autrement dit que $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$
$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n \\
&\overset{\text{HR}}{=} (a+b) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell=k+1}}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^{\ell} b^{n+1-\ell} + \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} a^{\ell} b^{n+1-\ell} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} \left(\binom{n}{\ell-1} + \binom{n}{\ell} \right) a^{\ell} b^{n+1-\ell} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+1}{\ell} a^{\ell} b^{n+1-\ell} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} a^{\ell} b^{n+1-\ell}
\end{aligned}$$
Ainsi, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.
- Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

Théorème 29

Si E est un ensemble à n éléments, alors
$$Card\left(\mathcal{P}(E)\right) = 2^n$$

Démonstration :

Notons pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, E_k l'ensemble des parties de E à k éléments. Alors, la famille $(E_0, E_1, \dots, E_n)$ est une partition de $\mathcal{P}(E)$. De plus, on sait que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $Card(E_k) = \binom{n}{k}$. Ainsi
$$Card(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} Card(E_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$