
Suites, sommes et récurrences

1.1 Généralités sur les suites

Définition 1

Soit $p \geq 1$. Soient u_1, u_2, \dots, u_p des réels. On appelle **p -liste** (ou **suite finie**) la suite

$$(u_1, u_2, \dots, u_p)$$

qu'on peut noter $(u_n)_{1 \leq n \leq p}$.

Remarques :

- R1** – Une p -liste s'appelle aussi un **p -uplet**. L'ordre entre les réels de la suite est important. L'entier p est appelé la **longueur** de la suite.
- R2** – Si $p = 2$, on dit qu'on a un **couple** (u_1, u_2) .
- R3** – Si $p = 3$, on dit qu'on a un **triplet** (u_1, u_2, u_3) .
- R4** – Soit $n \in \llbracket 1, p \rrbracket$, le réel u_n est appelé **terme d'indice n** de la suite (u_n) .
- R5** – Attention : ne pas confondre le terme u_n et la suite (u_n) .

Définition 2

Soient u_1, u_2, \dots des réels. On dit que la liste (infinie)

$$(u_1, u_2, u_3, \dots)$$

est une **suite numérique**, qu'on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n \geq 1}$.

Remarques :

- R1** – Une suite peut commencer également à partir de u_0 !

Exemples :

E1 – Une suite peut être explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

Le symbole " \forall " signifie "Pour tout" ou "Quelque soit"

E2 – Une suite peut être définie par une formule de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n + 4 \end{cases}$$

E3 – Une suite peut être définie de manière implicite :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution positive de l'équation

$$-1 + nx + x^2 + n^2x^3 = 0$$

Définition 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels.

- La suite (u_n) est dite **croissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}$$

- La suite (u_n) est dite **décroissante** si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n$$

- Si les inégalités sont strictes, on dit que la suite (u_n) est **strictement croissante** ou **strictement décroissante**.

Exemples :

E1 – Il existe des suites qui ne sont ni croissantes, ni décroissantes. Par exemple, la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n$$

E2 – Une suite est dite **croissante à partir d'un certain rang k** lorsque

$$\forall n \geq k, \quad u_n \leq u_{n+1}$$

De même, une suite est dite **décroissante à partir d'un certain rang k** lorsque

$$\forall n \geq k, \quad u_n \geq u_{n+1}$$

Remarques :

- R1** – Pour étudier si une suite (u_n) est monotone, on étudie le signe de la différence entre deux termes consécutifs, i.e. on regarde le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

R2 – Si une suite (u_n) est à termes tous strictement positifs, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

Alors,

$$(u_n) \text{ est croissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$$

$$(u_n) \text{ est décroissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

Définition 4

Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que

- (u_n) est **majorée** si

$$\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$

- (u_n) est **minorée** si

$$\exists m \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$$

- (u_n) est **bornée** si

$$\exists m, M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$$

ou si

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ / \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \alpha$$

Remarques :

R1 – Un réel m (resp. un réel M) qui vérifie les inégalités précédentes est appelé un **minorant** (resp. un **majorant**) de la suite (u_n) .

R2 – Le symbole " \exists " signifie "il existe" et le symbole "/" signifie "tel que".

R3 – Le symbole " $\exists!$ " (non présent ici) signifierait "il existe un unique".

R4 – Attention, l'ordre des symboles mathématiques a une importance : la phrase

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R} / u_n \leq M$$

est toujours vraie, et ne signifie absolument pas qu'une suite est majorée.

1.2 Sommes et symbole \sum

Définition 5

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et soient $u_0, u_1, u_2, \dots, u_p$ des réels. La somme

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_p$$

se note aussi

$$S = \sum_{k=0}^p u_k$$

Remarque :

La lettre n peut en réalité être remplacée par n'importe quelle autre lettre (qui n'est pas déjà utilisée !). On dit que c'est une **lettre muette**, appelée l'**indice de sommation**. On peut ainsi écrire :

$$S = \sum_{k=0}^p u_k = \sum_{n=0}^p u_n = \sum_{j=0}^p u_j$$

Proposition 6

Soient $p \in \mathbb{N}$ et soient $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p$ des réels. Alors

•

$$\sum_{k=1}^p (u_k + v_k) = \sum_{k=1}^p u_k + \sum_{k=1}^p v_k$$

• Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^p \lambda u_k = \lambda \sum_{k=1}^p u_k$$

•

$$\sum_{k=1}^p 1 = p$$

Remarques :

R1 – Attention aux valeurs minimale et maximale de l'indice de sommation. On a par exemple

$$\sum_{k=1}^{100} 1 = 100, \quad \sum_{k=0}^{100} 1 = 101$$

R2 – Il peut être parfois utile de réécrire une somme en changeant l'indice de sommation : pas forcément la lettre muette, mais la manière de numérotter les termes de la somme. Par exemple, les sommes ci-dessous sont en réalité les mêmes :

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{p+1} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=3}^{p+2} \frac{1}{k-2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}$$

R3 – Parfois certaines sommes peuvent se simplifier en dominos : c'est le cas lorsque le terme dans la somme est de la forme $v_{n+1} - v_n$:

$$\sum_{k=1}^p (v_{k+1} - v_k) = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \dots + (v_{p+1} - v_p) = v_{p+1} - v_1$$

On dit qu'on a une **somme télescopique**

Définition 7

Soient u_1, u_2, \dots, u_p des réels. on note leur produit $u_1 \times u_2 \times \dots \times u_p = \prod_{k=1}^p u_k$.

Un cas particulier, le produit $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ se note $n!$ et se prononce "**factorielle n** ".

Remarque :

Les règles de changements d'indices marchent de la manière identique que pour les sommes

1.3 Raisonnement par récurrence

1.3.1 Principes de récurrence

Proposition 8

Soit $(\mathcal{P}(n))$ une proposition dépendant de l'entier naturel n .

Pour montrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$, il suffit de démontrer que :

- la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- pour n'importe quel entier $n \geq 0$,

si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également

Exemples :

E1 – Montrons que pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : \left\| \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \right\|$.
- Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie :

$$\sum_{k=0}^0 k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Soit $n \geq 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^n k + (n+1) \\ &\stackrel{\text{HR}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

- Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

E2 – Montrons que pour tout entier naturel n ,

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : \left\| \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\|$.
- Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie :

$$\sum_{k=0}^0 k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(0+1)}{6}$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Soit $n \geq 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &\stackrel{\text{HR}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1) \left(n+1 + \frac{n(2n+1)}{6} \right) \\ &= (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

- Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

E3 – Montrons que pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

- Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : \left\| \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right\|$.
- Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie :

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Soit $n \geq 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^3 \\ &\stackrel{\text{HR}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n+1 \right) \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

- Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

E4 – Soit $q \in \mathbb{R}$ différent de 1. Montrons que pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

- Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : \left\| \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - a} \right\|$.

- Pour $n = 0$, vérifions que la propriété est vraie :

$$\sum_{k=0}^0 q^k = 1 = \frac{1-q}{1-q}$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Soit $n \geq 0$. Supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, i.e. montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} \\ &\stackrel{\text{HR}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1-q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \end{aligned}$$

- Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

Remarques :

R1 – On peut parfois faire une **récurrence double** : Pour montrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$, il suffit de démontrer que :

- les propositions $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.
- pour n'importe quel entier $n \geq 0$,

si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie également

R2 – On peut également faire une **récurrence forte** : Pour montrer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$, il suffit de démontrer que :

- la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- pour n'importe quel entier $n \geq 0$,

si $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également

1.4 Suites classiques

1.4.1 Suites arithmétiques

Définition 9

Une suite (u_n) de réels est dite **arithmétique** si

$$\exists r \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Le réel r est appelé la **raison** de la suite (u_n) .

Remarque :

Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n .

Proposition 10

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

Remarque :

Si le premier terme de la suite est u_1 , le résultat devient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 + (n-1)r$$

Proposition 11

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r , alors pour tous $p, n \in \mathbb{N}$, $p \leq n$,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = (n-p+1) \frac{u_p + u_n}{2}$$

En particulier

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

1.4.2 Suites géométriques

Définition 12

Une suite (u_n) de réels est dite **géométrique** si

$$\exists q \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$$

Le réel q est appelé la **raison** de la suite (u_n) .

Remarque :

Pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ne dépend pas de n .

Proposition 13

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 q^n$$

Remarque :

Si le premier terme de la suite est u_1 , le résultat devient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_1 q^{n-1}$$

Proposition 14

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q , alors pour tous $p, n \in \mathbb{N}$, $p \leq n$,

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \sum_{k=p}^n u_k = \begin{cases} u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n - p + 1)u_p & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

En particulier

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = \begin{cases} u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n + 1)u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

1.4.3 Suites arithmético-géométriques**Définition 15**

Une suite (u_n) de réels est dite **arithmético-géométrique** si

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

Remarques :

R1 – Une suite arithmétique est une suite arithmético-géométrique ($a = 1$ et $b = r$)

R2 – Une suite géométrique est une suite arithmético-géométrique ($a = q$ et $b = 0$)

R3 – Soit (u_n) est une suite arithmético-géométrique

- On cherche $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = a\ell + b$ (c'est le **point fixe**)
- Alors, la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - \ell$$

est géométrique de raison a .

On en déduit alors facilement une expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n en fonction de n .