CHAPITRE 8

Nombres complexes

8.1 Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

8.1.1 Définitions

Définition 1

On appelle **ensemble des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme

$$a + ib, \qquad \text{avec } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

où i est un nombre imaginaire qui vérifie $i^2 = -1$.
Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est alors unique :

- le réel a s'appelle la **partie réelle de z**, notée $a = \mathrm{Re}(z)$.
- le réel b s'appelle la **partie imaginaire de z**, notée $b = \mathrm{Im}(z)$.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes partie réelle et partie imaginaire.

Remarques :

R 1 – Cette représentation sous la forme $a + ib$ d'un nombre complexe s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe.

R 2 – Les nombres réels sont des nombres complexes qui ont une partie imaginaire nulle.

R 3 – Les nombres complexes de la forme ib sont eux appelés des **imaginaires purs**.

R 4 – On peut agir sur les nombres complexes comme sur les réels : les règles de développement et de factorisation sont encore vraies, il faut juste utiliser que $i^2 = -1$.

R 5 – On peut additionner deux nombres complexes :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

R 6 – On peut aussi multiplier deux nombres complexes :

$$(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

Proposition 2 ***Formule du binôme de Newton***

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{(z_1+z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}}$$

Démonstration :

Même démonstration que pour les réels, par récurrence.

Proposition 3 *$a^n - b^n$*

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2) \sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-1-k}}$$

Démonstration :

Il suffit de développer le second membre et on obtient le membre de gauche.

8.1.2 Conjugué

Définition 4

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **nombre complexe conjugué de z** le complexe, noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a - ib$.

Proposition 5

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. Alors

1. $\boxed{z \times \overline{z} = a^2 + b^2}$ *: c'est toujours un réel positif.*
2. $\boxed{Re(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}}$ *et* $\boxed{Im(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. *z est un nombre réel $\Longleftrightarrow z = \overline{z}$ et z est un imaginaire pur $\Longleftrightarrow z = -\overline{z}$*
5. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ *et* $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

Remarque :

On peut aussi définir l'inverse d'un nombre complexe (non nul) en s'aidant du conjugué :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \times \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2}$$

8.1.3 Module d'un nombre complexe

Définition 6

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Alors, on appelle **module de z** le réel positif noté $|z|$ défini par

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Proposition 7

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors

1. $\boxed{z \times \overline{z} = |z|^2}$
2. $|z| = |\overline{z}|$
3. $Re(z) \leqslant |z|$ *et* $Im(z) \leqslant |z|$
4. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

Théorème 8 ***Inégalité triangulaire***

Pour tous nombres complexes z et z' dans $\mathbb{C}$, on a $\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$.

Démonstration :

$|z + z'|^2 = (z + z')\overline{(z + z')} = z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + \overline{z}z' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| = (|z| + |z'|)^2$
D'où le résultat en passant à la racine carrée des deux côtés, on a bien l'inégalité voulue.

8.1.4 Exponentielle complexe

Définition 9

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 et de centre 0. Ce cercle correspond à l'ensemble

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$$

On repère chaque point de $\mathcal{C}$ par un angle $\theta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$ (angle avec l'axe horizontal). Ce point a donc pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Ainsi pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{U}$,

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \ / \ z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

On dit que θ est un **argument** du nombre complexe z.

Remarques :

R 1 – Si on a un nombre complexe quelconque z non nul, on peut donc lui définir un argument, qui sera celui de $\dfrac{z}{|z|}$.

R 2 – Un nombre complexe z (non nul) est donc complètement défini par son module $\rho = |z|$ et un de ses arguments θ.

Définition 10

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe égal à : $\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$. Si $z = a+ib$, on peut noter plus généralement l'exponentielle du nombre complexe z par

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a\left(\cos(b) + i\sin(b)\right)$$

Remarques :

- **R 1** – Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta})}$ et $\boxed{\sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})}$.
- **R 2** – Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$
- **R 3** – $|e^{i\theta}| = 1$
- **R 4** – $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

Théorème 11 ***Formule de Moivre***

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\boxed{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$.

Autrement dit, on a : $\boxed{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$.

Théorème 12 ***Formules d'Euler***

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}, \qquad \boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

8.1.5 Forme trigonométrique d'un complexe non nul

Définition 13

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle **argument** de z tout réel θ qui vérifie

$$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}}$$

On note $\arg(z)$ un tel réel. L'écriture $z = |z|e^{i\arg(z)}$ est appelée la **forme trigonométrique** (ou **forme exponentielle**) de z.

Proposition 14

Soient z et z' deux nombres complexes, alors

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \end{cases}$$

Remarques :

- **R 1** – Le module est unique, on dit donc « le » module de z
- **R 2** – Il n'y a pas unicité de l'argument d'un complexe, on dit donc « un » argument de z. L'argument est défini « modulo 2π ».
- **R 3** – Un complexe z admet un unique argument dans $[0, 2\pi[$, un unique argument dans $]-\pi, \pi]$, dans tout intervalle $[a, b[$ ou $]a, b]$ de longueur 2π.

8.2 Applications en trigonométrie

8.2.1 Définitions

Définition 15

Pour tout réel x, on définit $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les nombres définis par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \mathrm{Re}\big(e^{ix}\big) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \mathrm{Im}\big(e^{ix}\big) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$$

Proposition 16

Les ***fonctions cosinus et sinus****, notées* $\cos$ *et* $\sin$*, sont donc définies sur* $\mathbb{R}$*, et vérifient :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1} \ \textit{et}\ \boxed{-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1} \ \textit{et}\ \boxed{\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1}$$

Démonstration :

Cela vient de la définition : ce sont les coordonnées du point sur le cercle trigonométrique. Les abscisses et ordonnées sont donc toujours dans $[-1,1]$ et le théorème de Pythagore nous donne la deuxième relation.

Proposition 17

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \cos(y) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = y + 2k\pi \\ \textit{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = -y + 2k\pi \end{cases} \quad \textit{et} \quad \sin(x) = \sin(y) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = y + 2k\pi \\ \textit{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = (\pi - y) + 2k\pi \end{cases}$$

Remarque :

$$\boxed{\cos(x) = 0} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \qquad \boxed{\sin(x) = 0} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = k\pi$$

$$\boxed{\cos(x) = 1} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = 2k\pi \qquad \boxed{\sin(x) = 1} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\boxed{\cos(x) = -1} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = \pi + 2k\pi \qquad \boxed{\sin(x) = -1} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ x = -\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Définition 18

On appelle **fonction tangente**, la fonction tan définie par l'expression : $\boxed{\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}$.

Elle est définie partout où $\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Valeurs remarquables des cos,sin,tan :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\star\star$

8.2.2 Propriétés trigonométriques

Proposition 19 ***Parité, périodicité***

La fonction cosinus est 2π-périodique et paire sur $\mathbb{R}$.
La fonction sinus est 2π-périodique et impaire sur $\mathbb{R}$.
La fonction tangente est π-périodique et impaire sur son domaine de définition.
On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\cos(-x) = \cos(x)} \quad \boxed{\cos(x+2\pi) = \cos(x)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\sin(-x) = -\sin(x)} \quad \boxed{\sin(x+2\pi) = \sin(x)}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \quad \boxed{\tan(-x) = -\tan(x)} \quad \boxed{\tan(x+\pi) = \tan(x)}$$

Proposition 20 ***Formules de symétries***

Pour tout réel x tel que les expressions aient un sens, on a par lecture du cercle trigonométrique :

$$\boxed{\cos(x+\pi) = -\cos(x)} \quad \boxed{\sin(x+\pi) = -\sin(x)} \quad \boxed{\tan(x+\pi) = \tan(x)}$$
$$\boxed{\cos(\pi - x) = -\cos(x)} \quad \boxed{\sin(\pi - x) = \sin(x)} \quad \boxed{\tan(\pi - x) = -\tan(x)}$$
$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)} \quad \boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)} \quad \boxed{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}}$$
$$\boxed{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)} \quad \boxed{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)} \quad \boxed{\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}}$$

Remarques :

R 1 – Ces formules sont à retrouver rapidement par lecture sur le cercle trigonométrique.

R 2 – Il existe de nombreuses autres formules trigonométriques liant les fonctions cosinus et sinus, mais seules les précédentes sont à connaître par coeur (ou à retrouver très rapidement par lecture graphique). Toutes les autres sont à re-démontrer, et le résultat sera toujours donné par l'énoncé.

Exemples :

E 1 – Montrer que pour tous réels a et b, on a les **formules d'addition suivantes** :

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$

et

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}$$

On a $\cos(a+b) = \mathrm{Re}(e^{i(a+b)})$ et $\sin(a+b) = \mathrm{Im}(e^{i(a+b)})$.
Or, on peut écrire :

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia}e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)) \end{aligned}$$

Par unicité des parties réelles et imaginaires de $e^{i(a+b)}$, on en déduit donc bien que d'une part : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et que d'autre part : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

E 2 – Montrer que pour tous réels a et b, on a les **formules de l'angle moitié** :

$$\boxed{\cos(a)+\cos(b)=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

et

$$\boxed{\sin(a)+\sin(b)=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

On a $\cos(a)+\cos(b)=\mathrm{Re}(e^{ia})+\mathrm{Re}(e^{ib})=\mathrm{Re}(e^{ia}+e^{ib})$. De même $\sin(a)+\sin(b)=\mathrm{Im}(e^{ia}+e^{ib})$. Or, on a :

$$\begin{aligned} e^{ia}+e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{i\frac{b-a}{2}}\right)=e^{i\frac{a+b}{2}}2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)+i\ 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

Par unicité des parties réelles et imaginaires de $e^{ia}+e^{ib}$, on en déduit bien les formules proposées.

E 3 – Il existe également des **techniques de linéarisation** des puissances de cosinus ou sinus, c'est-à-dire mettre un produit de cosinus ou sinus sous une forme de somme de cosinus et de sinus.

Par exemple : peut-on linéariser $\cos^4(x)$, i.e. écrire $\cos^4(x)$ comme une somme de termes de la forme $\lambda\cos(\beta x)$ ou $\mu\sin(\gamma x)$.
On utilise alors les formules d'Euler, puis la formule du Binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{2^4}\left(e^{4ix}+\binom{4}{1}e^{3ix}e^{-ix}+\binom{4}{2}e^{2ix}e^{-2ix}+\binom{4}{3}e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left((e^{4ix}+e^{-4ix})+4(e^{2ix}+e^{-2ix})+6\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}} \end{aligned}$$

De même, peut-on linéariser $\cos^3(x)\sin(x)$?

$$\begin{aligned} \cos^3(x)\sin(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{16i}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right) \\ &= \frac{1}{16i}\left((e^{4ix}-e^{-4ix})+2(e^{2ix}-e^{-2ix})\right) \\ &= \frac{1}{16i}\left(2i\sin(4x)+4i\sin(2x)\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{8}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)} \end{aligned}$$

8.3 Equations dans $\mathbb{C}$

8.3.1 Racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$

Définition 21

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième de Z** tout nombre z qui vérifie $z^n = Z$.

Remarques :

R 1 – Si $n = 2$, on appelle racine carrée d'un nombre complexe, tout nombre z qui vérifie $z^2 = Z$. Par exemple, i est une racine carrée de -1.

R 2 – On n'écrit JAMAIS $\sqrt{z}$ pour z complexe (sauf si c'est un réel positif).

R 3 – On n'écrit JAMAIS $z^{1/2}$ (sauf si c'est un réel strictement positif).

Théorème 22 ***Racines n-ièmes de l'unité***

Il y a exactement n racines n-ièmes distinctes de 1, qui sont les nombres

$$\boxed{\omega_k = \exp\left(ik\frac{2\pi}{n}\right), \quad k \in [\![0, n-1]\!]}$$

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de 1.

Démonstration :

Cherchons z sous sa forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$. Alors

$$z^n = 1 \iff \rho^n e^{in\theta} = 1e^{i0} \iff \begin{cases} \rho^n = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ n\theta = 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ z = \exp\left(ik\frac{2\pi}{n}\right) = \omega_k \end{cases}$$

De plus, cherchons les racines n-ièmes égales pour en garder le minimum :

$$\omega_k = \omega_\ell \iff \exists p \in \mathbb{Z} \ / \ \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\ell\pi}{n} + 2p\pi \iff \exists p \in \mathbb{Z} \ / \ k = \ell + pn$$

Donc ω_k et ω_ℓ sont distincts si et seulement si ℓ et k diffèrent d'un multiple de n. On peut donc se restreindre à prendre n ω_i « consécutifs » qui seront donc bien distincts (par exemple $i \in [\![0, n-1]\!]$) et on obtient bien toutes les racines n-ièmes de 1.

Proposition 23

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des n racines n-ièmes de l'unité est nulle. Autrement dit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = 0}$$

Démonstration :

En effet, on obtient une somme de termes d'une suite géométrique. Notons $q = \omega_1 = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Alors, on a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = q^k$. Ainsi, puisque $q \neq 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} = 0$.

Remarques :

R 1 – On a $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$

R 2 – On a $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ avec $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$. On a en particulier : $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$.

R 3 – On a $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$ avec $i^2 = -1$

Proposition 24

Tout nombre complexe non nul Z possède exactement n racines n-ièmes distinctes.
Si on connait une des racines (par exemple $z_0 = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\arg(Z)/n}$), on obtient toutes les racines en multipliant z_0 par les n racines de l'unité.

Démonstration :

En effet, si on pose $z_0 = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\arg(Z)/n}$, on a bien $z_0^n = |Z|e^{i\arg(Z)} = Z$, donc z_0 est bien une racine n-ième de Z.
Cherchons donc maintenant toutes les autres. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z^n = Z &\iff z^n = z_0^n \iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \;/\; \frac{z}{z_0} = \omega_k \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \;/\; z = z_0\omega_k \end{aligned}$$

Et les ω_k étant bien deux à deux distincts pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, le nombre complexe Z admet exactement n racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$.

Proposition 25

Tout nombre complexe non nul Z possède exactement 2 racines carrées dans $\mathbb{C}$.
En particulier, l'équation $z^2 = a^2$ admet exactement deux solutions qui sont $z = a$ et $z = -a$.

Remarques :

R 1 – Si α est un réel strictement positif, alors : $z^2 = \alpha \iff z = \sqrt{\alpha}$ ou $z = -\sqrt{\alpha}$.

R 2 – Si β est un réel strictement négatif, alors :

$$z^2 = \beta \iff z^2 = (i\sqrt{-\beta})^2 \iff z = i\sqrt{-\beta} \text{ ou } z = -i\sqrt{-\beta}$$

R 3 – Soit Z un nombre complexe dont on cherche les racines carrées.

- Si on connaît Z sous forme exponentielle, $Z = \rho e^{i\theta}$ ($\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), alors les racines carrées sont exactement $\pm\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$.

- Si on connaît Z sous forme algébrique, $Z = X + iY$, si on cherche les racines carrées z sous la forme $z = a + ib$, on a :

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = X & \text{(égalité des parties réelles)} \\ a^2 + b^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} & \text{(égalité des modules)} \\ 2ab = Y & \text{(égalité des parties imaginaires)} \end{cases}$$

  Les deux premières équations donnent a^2 et b^2 et la dernière équation indique si a et b doivent être de même signe ou de signe contraire.

8.3.2 Equation du second degré

Théorème 26

On considère l'équation

$$(E) : az^2 + bz + c = 0$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.
On appelle ***discriminant de l'équation*** (E) *le complexe* $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.
Alors, si on note δ et $-\delta$ les racines carrées de Δ dans $\mathbb{C}$, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ sont

$$\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b+\delta}{2a}$$

(qui sont égales si $\Delta = 0$).

Démonstration :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right] = a\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

Proposition 27 ***Relations coefficients-racines***

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Notons z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Alors

$$\boxed{z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}}, \qquad \boxed{z_1 z_2 = \frac{c}{a}}$$

Démonstration :

On sait que $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1z_2$. On identifie alors les coefficients et on trouve les relations voulues.

Remarque :

Si a, b, c sont des $\boxed{\text{réels}}$ tels que $a \neq 0$, alors pour résoudre l'équation « $az^2+bz+c = 0$ », on étudie toujours $\Delta = b^2 - 4ac$ qui est cette fois un réel.

- Si $\Delta \geqslant 0$, alors l'équation admet deux solutions (éventuellement confondues si $\Delta = 0$) qui sont

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$$\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Remarque :

Prendre garde à ne pas écrire $\sqrt{\Delta}$ si Δ est un complexe !! Uniquement si Δ est un réel positif