
Limites et comparaisons de fonctions

5.1 Limites d'une fonction

On considère dans cette partie, une fonction f définie sur son domaine de définition D_f .

5.1.1 Voisinage d'un point

Définition 1

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est définie **au voisinage de x_0** s'il existe un intervalle I , non réduit à un point, contenant x_0 tel que f soit définie sur I sauf éventuellement en x_0 .
Autrement dit, $I \subset D_f$, ou éventuellement $I \setminus \{x_0\} \subset D_f$.

Exemple :

$$\text{Soit } f : x \mapsto \frac{1}{x-1}.$$

Cette fonction est bien définie au voisinage de 2 car $]1, 3]$ est un intervalle contenant 2 et inclus dans D_f .

Cette fonction est définie au voisinage de 1 car $]0, 2[$ est un intervalle contenant 1 et qui est, si on le prive de 1, inclus dans D_f .

Définition 2

On dit que f est définie **au voisinage de $+\infty$** s'il existe un réel a tel que $[a, +\infty[\subset D_f$.

On dit que f est définie **au voisinage de $-\infty$** s'il existe un réel b tel que $] -\infty, b] \subset D_f$.

Exemple :

$$\text{Soit } g : x \mapsto \ln(x-8).$$

Cette fonction est définie sur $]8, +\infty[$ qui contient au moins l'intervalle $[9, +\infty[$. Ainsi, la fonction g est définie au voisinage de $+\infty$.

La fonction g n'est cependant pas définie au voisinage de $-\infty$ car D_g ne contient aucun intervalle du type $] -\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$.

5.1.2 Limite en un point $x_0 \in \mathbb{R}$

Définition 3

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que la fonction f est définie au voisinage de x_0 .

On dit que **la fonction f admet pour limite finie ℓ en x_0** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de ℓ , du moment que x est suffisamment proche de x_0 . On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$$

Définition 4

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

On suppose que la fonction f est définie au voisinage de x_0 .

- On dit que **la fonction f admet pour limite $+\infty$ en x_0** si :

$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \alpha \implies f(x) \geq A$$

Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi grand que l'on veut, du moment que x est suffisamment proche de x_0 . On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} +\infty$$

- On dit que **la fonction f admet pour limite $-\infty$ en x_0** si :

$$\forall B < 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \alpha \implies f(x) \leq B$$

Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi petit que l'on veut, du moment que x est suffisamment proche de x_0 . On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} -\infty$$

Remarque :

La phrase avec les quantificateurs s'exprime toujours de la même manière :

"Pour tout voisinage V de la limite", "Il existe un voisinage U du point" "tel que" $x \in U \implies f(x) \in V$

Définition 5

Soit f une fonction définie en un point x_0 et définie au voisinage de x_0 .

On dit que f est **continue en x_0** si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \forall x \in D_f, |x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

5.1.3 Limites à gauche et à droite en un point

Définition 6

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- On suppose que la fonction f est définie au voisinage à gauche de x_0 .
On dit que **la fonction f admet pour limite finie ℓ à gauche en x_0** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f, \quad x \in [x_0 - \alpha, x_0[\leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} \ell$$

- On suppose que la fonction f est définie au voisinage à droite de x_0 .
On dit que **la fonction f admet pour limite finie ℓ à droite en x_0** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f, \quad x \in]x_0, x_0 + \alpha] \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} \ell$$

Proposition 7

Soit f une fonction définie en un point x_0 . Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \\ f(x_0) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \end{cases}$$

Si ces conditions sont vérifiées, on peut dire que la fonction f est continue en x_0 .

Exemple :

La fonction partie entière n'est pas continue en tout entier $k \in \mathbb{Z}$ car

$$\lim_{x \rightarrow k^-} \text{Ent}(x) = k - 1, \quad \lim_{x \rightarrow k^+} \text{Ent}(x) = k$$

Proposition 8

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 , mais non définie en x_0 . Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell \end{cases}$$

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que la fonction f est **prolongeable par continuité en x_0** .

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ \ln(x) & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

La fonction f est continue sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ (ce sont des fonctions usuelles, polynôme ou fonction logarithme). De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = 0$$

donc la fonction f est prolongeable par continuité en 1 par une fonction g continue sur \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \\ \ln(x) & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

5.1.4 Limite au voisinage de l'infini**Définition 9**

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que **la fonction f admet pour limite finie ℓ en $+\infty$** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in D_f, \quad x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de ℓ , du moment que x est suffisamment grand. On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$$

Définition 10

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

- On dit que **la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$** si :

$$\forall M > 0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in D_f, \quad x \geq A \implies f(x) \geq M$$

Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de ℓ , du moment que x est suffisamment grand. On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

- On dit que **la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$** si :

$$\forall m < 0, \exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in D_f, \quad x \geq A \implies f(x) \leq m$$

Autrement dit, $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de ℓ , du moment que x est suffisamment grand. On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

Remarque :

La phrase avec les quantificateurs s'exprime toujours de la même manière :

"Pour tout voisinage V de la limite", "Il existe un voisinage U du point" "tel que" $x \in U \implies f(x) \in V$

5.2 Opérations sur les limites

5.2.1 Sommes, produits et quotients

Remarques :

R1 – On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

R2 – $\pm\infty$ signifie qu'il faut appliquer la "règle des signes" pour savoir si on a $-\infty$ ou $+\infty$.

R3 – *F.I.* veut dire "forme indéterminée"

Dans toute cette partie, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

Limite d'une somme

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell'$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$	$-\infty$	$-\infty$	<i>F.I.</i>
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$	<i>F.I.</i>	$+\infty$	$+\infty$

Limite d'un produit

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x))$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell' \neq 0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$	0	0	<i>F.I.</i>
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq 0$	0	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$	<i>F.I.</i>	$\pm\infty$	$\pm\infty$

Limite de l'inverse

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$-\infty$	$\ell \neq 0$	0^-	0	0^+	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$	0	$\frac{1}{\ell}$	$-\infty$	pas de limite	$+\infty$	0

Limite du quotient

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0^+ \text{ ou } 0^-$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell' \neq 0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$	<i>F.I.</i>	0	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \neq 0$	∞	$\frac{\ell}{\ell'}$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	<i>F.I.</i>

Remarque :

Il y a donc quatre types de forme indéterminée :

$$\boxed{\infty - \infty}, \quad \boxed{0 \times \infty}, \quad \boxed{\frac{\infty}{\infty}}, \quad \boxed{\frac{0}{0}}$$

5.2.2 Composition des limites

Théorème 11

Soient f et g deux fonctions telles que $f(D_f) \subset D_g$, et soient $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$,
- et $\lim_{u \rightarrow b} g(u) = c$,

Alors, $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(e^{-2x} + 1)$$

Quelles sont les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} + 1 = 1 \text{ et } \lim_{u \rightarrow 1} \ln(u) = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} + 1 = +\infty \text{ et } \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

5.2.3 Principales propriétés

Théorème 12

Unicité

Si f admet une limite en un point, alors cette limite est unique.

Proposition 13

Limites et bornes

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction telle que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Alors :

- f est bornée au voisinage de x_0 .
- Si $\ell < M$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $f(x) < M$
- Si $\ell > m$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $f(x) > m$
- Si $m < \ell < M$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $m < f(x) < M$
- Si $\ell \neq 0$, alors il existe un voisinage de x_0 tel que $f(x) \neq 0$ et $f(x)$ est du signe de ℓ .

Théorème 14

Soit f une fonction telle que, pour tout x au voisinage de x_0 , on ait :

$$f(x) \geq 0 \quad (\text{ou } f(x) > 0)$$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, alors $\ell \geq 0$.

Théorème 15*Passage à la limite dans les inégalités*

Si f et g ont toutes deux des limites finies en x_0 et si pour tout x au voisinage de x_0 ,

$$f(x) \leq g(x)$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Remarque :

Par passage à la limite dans une inégalité, l'inégalité devient systématiquement large

Proposition 16

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction telle que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

Alors :

- Si pour tout x au voisinage de x_0 , on a $m \leq f(x)$ (ou $m < f(x)$), alors $m \leq \ell$.
- Si pour tout x au voisinage de x_0 , on a $f(x) \leq M$ (ou $f(x) < M$), alors $\ell \leq M$.
- Si pour tout x au voisinage de x_0 , on a $m \leq f(x) \leq M$, alors $m \leq \ell \leq M$.

5.2.4 Théorèmes d'encadrement**Théorème 17***Théorème "des gendarmes"*

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- Si pour tout x au voisinage de x_0 , on a

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell$,

Alors, la fonction g admet également une limite finie en x_0 et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$$

- Si pour tout x au voisinage de x_0 , on a

$$|f(x) - \ell| \leq g(x)$$

et si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,

alors, la fonction f admet également une limite finie en x_0 et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

Conséquence 18

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 avec $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si

- f est bornée au voisinage de x_0 ,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,

Alors,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$$

Théorème 19*Limites finies par comparaison*

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons que pour tout x au voisinage de x_0 , on a

$$f(x) \leq g(x)$$

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, alors on a aussi $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, alors on a aussi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

5.2.5 Le cas des fonctions monotones**Théorème 20**

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si f est monotone sur $]a, b[$ (croissante ou décroissante), alors f possède toujours une limite en a et b , la limite pouvant être finie ou infinie.

Remarques :

R1 – Si f est croissante et majorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en b et, pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \leq \ell$. On a même :

$$\ell = \sup_{x \in]a, b[} f(x)$$

R2 – Si f est croissante et minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en a et, pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \geq \ell$. On a même :

$$\ell = \inf_{x \in]a, b[} f(x)$$

R3 – Si f est décroissante et minorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en b et, pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \geq \ell$. On a même :

$$\ell = \inf_{x \in]a, b[} f(x)$$

R4 – Si f est décroissante et majorée sur $]a, b[$, alors f admet une limite finie ℓ en a et, pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \leq \ell$. On a même :

$$\ell = \sup_{x \in]a, b[} f(x)$$

R5 – Si f est croissante et non majorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$

R6 – Si f est croissante et non minorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

R7 – Si f est décroissante et non minorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$

R8 – Si f est décroissante et non majorée sur $]a, b[$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

5.2.6 Limites des fonctions usuelles

- Fonctions puissances (avec $\alpha > 0$) :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$$

- Fonction logarithme :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

- Fonction exponentielle :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Théorème 21

Croissances comparées en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} = +\infty$$

Remarque :

Plus généralement, pour tous réels strictement positifs α et β , on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)^\alpha}{x^\beta} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{(e^x)^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{(\ln(x))^\alpha} = +\infty$$

Conséquences 22

Croissances comparées en 0 et en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Remarque :

Plus généralement, pour tous réels strictement positifs α et β , on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (\ln(x))^\beta = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\alpha (e^x)^\beta = 0$$

5.3 Branches infinies d'une fonction

Lorsqu'une fonction f tend vers $\pm\infty$ en un point, ou lorsqu'on regarde ses limites en $\pm\infty$, on dit qu'on étudie **les branches infinies de la fonction f** .

5.3.1 Asymptote verticale en un point x_0

Définition 23

Soit f une fonction définie au voisinage du réel x_0 .

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$ ou si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$, on dit que la courbe \mathcal{C}_f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = x_0$.

5.3.2 Asymptote horizontale en $\pm\infty$

Définition 24

Soit f définie au voisinage de $\pm\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$, on dit que la courbe \mathcal{C}_f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = b$ ($b \in \mathbb{R}$).

5.3.3 Asymptotes obliques en $\pm\infty$

Dans cette partie, on considère une fonction f telle que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Définition 25

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$, alors $f(x)$ devient très grand par rapport à x , lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On dit que la courbe \mathcal{C}_f admet une **branche parabolique de direction asymptotique** (Oy).

Définition 26

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors $f(x)$ devient très petit par rapport à x , lorsque $x \rightarrow +\infty$.

On dit que la courbe \mathcal{C}_f admet une **branche parabolique de direction asymptotique** (Ox).

Définition 27

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il y a deux cas :

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, alors on dit que la courbe \mathcal{C}_f admet une **asymptote oblique d'équation $y = ax + b$** .
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, alors on dit que la courbe \mathcal{C}_f admet une **branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$** .

5.4 Comparaison des fonctions

5.4.1 Fonctions équivalentes

Définition 28

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 .

On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que, pour tout x au voisinage de x_0 :

$$f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x)) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

On note alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$$

Théorème 29

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0), alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Démonstration :

\Rightarrow Supposons que $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$. Alors, il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que, pour tout x au voisinage de x_0 , on ait $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Puisque g ne s'annule pas au voisinage de x_0 , on peut donc écrire : $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$.

\Leftarrow Posons pour tout x tel que $g(x) \neq 0$, $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. La fonction h est définie au moins sur un voisinage de x_0 , et on sait que $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1$. Alors, pour tout x au voisinage de x_0 ,

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}g(x) = g(x)h(x) = g(x)(1 + (h(x) - 1))$$

Autrement dit, en posant $\varepsilon(x) = h(x) - 1$ pour tout x tel que $h(x)$ existe, on a bien montré que

$$f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x)) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (h(x) - 1) = 0$$

Remarque :

Si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$, on a aussi $g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$. On pourra donc dire que **les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de x_0** .

Exemple :

Considérons les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 - x \ln(x)$ et $g(x) = x^2$.

$$\text{Alors} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - x \ln(x)}{x^2} = 1 - \frac{\ln(x)}{x}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées), on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, i.e. $x^2 - x \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$.

5.4.2 Opérations sur les fonctions équivalentes

Proposition 30

Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f et g sont deux fonctions équivalentes en x_0 , alors leur limite en x_0 sont de même nature et sont identiques si elles existent.

Remarques :

- R1** – Deux fonctions qui n'ont pas les mêmes limites ne peuvent pas être équivalentes.
- R2** – Deux fonctions qui ont la même limite en x_0 ne sont pas forcément équivalentes en x_0 .

Proposition 31

- Deux fonctions équivalentes au voisinage de x_0 sont de même signe au voisinage de x_0 .
- Si $f > 0$ au voisinage de x_0 et si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$, alors $g > 0$ au voisinage de x_0 .
- Si $f(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 et si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$, alors $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 .

Théorème 32

Cas d'une limite finie NON NULLE

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ avec $\ell \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \ell$.

Démonstration :

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, alors $\frac{f(x)}{\ell} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$ et donc $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \ell$.

Remarques :

- R1** – $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \ell$ signifie que f est équivalente à la fonction constante $x \mapsto \ell$ au voisinage de x_0 .
- R2** – De manière générale, il n'y a pas d'équivalent à la fonction nulle : on n'écrira JAMAIS $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} 0$.

Théorème 33

Polynômes

Soit P une fonction polynôme de degré n :

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

une fonction polynôme avec $a_n \neq 0$. Alors en $+\infty$ et en $-\infty$, $P(x)$ est équivalent à son monôme du plus haut degré :

$$P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_n x^n, \quad P(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} a_n x^n$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x - 2}{x^4 + 2x^2 + 1}$. Alors

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x - 2}{x^4 + 2x^2 + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x}$$

Théorème 34**Fonctions dérivables**

Soit f une fonction dérivable en a . On rappelle que cela signifie que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)$.

Alors, si $f'(a) \neq 0$, on a :

$$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$$

Conséquences 35

On en déduit les équivalents usuels suivants :

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$$

$$\forall \alpha \neq 0, \quad (1 + x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x,$$

$$\sqrt{1 + x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2}x$$

Remarques :

R1 – Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la relation d'équivalence au voisinage de x_0 est :

– **réflexive** : $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$

– **symétrique** : $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$

– **transitive** : Si $\begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h(x) \end{cases}$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} h(x)$

R2 – L'équivalence entre les fonctions est

– **compatible avec le produit** :

$$\text{Si } \begin{cases} f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_2(x) \end{cases}, \text{ alors } f_1(x)f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x)g_2(x)$$

– **compatible avec le quotient** :

$$\text{Si } \begin{cases} f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x) \\ f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_2(x) \\ f_2(x) \text{ au voisinage de } x_0 \text{ (sauf évent. en } x_0), \end{cases}, \text{ alors } \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$$

– **compatible avec la puissance** :

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ f(x) > 0 \text{ au voisinage de } x_0 \end{cases}, \text{ alors } \forall \alpha \in \mathbb{R}, (f(x))^\alpha \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} (g(x))^\alpha$$

Attention que la puissance α ne doit pas dépendre de x !

– **compatible avec le changement de variable** : Soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit u une fonction définie au voisinage de t_0 avec $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = x_0$ avec $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \\ f(u(t)) \text{ et } g(u(t)) \text{ existent au vois. de } t_0 \end{cases}, \text{ Alors } f(u(t)) \underset{t \rightarrow t_0}{\sim} g(u(t))$$

Proposition 36

L'équivalence N'EST PAS COMPATIBLE avec la somme. Autrement dit :

$$\text{Si } f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x) \text{ et } f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_2(x),$$

on n'a pas forcément $f_1(x) + f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g_1(x) + g_2(x) !!!!!!!$

Démonstration :

Il suffit de trouver un contre-exemple.

$$\text{si } f(x) = x^2 + x \text{ et } g(x) = -x^2 + 1. \text{ Alors } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \text{ et } g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2 \text{ mais } f(x) + g(x) = x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x.$$

$$\text{Or, } x^2 - x^2 = 0 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 0.$$

Proposition 37

L'équivalence N'EST PAS COMPATIBLE avec la composition. Autrement dit :

$$\text{Si } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \text{ et } u \circ f, u \circ g \text{ existent au voisinage de } x_0$$

on n'a pas forcément $u \circ f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} u \circ g(x)$

Remarque :

En particulier, ON NE PEUT PAS COMPOSER PAR L'EXPONENTIELLE. Par exemple $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ (polynômes), mais e^{x+1} n'est pas équivalent à e^x en $+\infty$, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x+1}}{e^x} = e \neq 1$.

Proposition 38**Composition par ln**

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit u une fonction strictement positive au voisinage de x_0 avec $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \ell \in [0, +\infty[$, mais vérifiant $\ell \neq 1$. Alors

$$\text{Si } u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} v(x), \quad \text{alors } \ln(u(x)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \ln(v(x))$$

Démonstration :

On suppose que $u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} v(x)$. Puisque u est strictement positive au voisinage de x_0 , on sait que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x)}{u(x)} = 1$.

Il faut montrer que $\ln(u(x)) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \ln(v(x))$, autrement dit $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(v(x))}{\ln(u(x))} = 1$.

$$\frac{\ln(v(x))}{\ln(u(x))} = \frac{\ln\left(\frac{v(x)}{u(x)}u(x)\right)}{\ln(u(x))} = \frac{\ln\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right)}{\ln(u(x))} + \frac{\ln(u(x))}{\ln(u(x))} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right)}{\ln(u(x))}$$

Or, $\ln\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ln(1)$ par composition et $\ln(u(x)) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \in \overline{\mathbb{R}}, \ell \neq 0$, donc par quotient, $\frac{\ln\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right)}{\ln(u(x))} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ et on a bien montré que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(v(x))}{\ln(u(x))} = 1$$

5.4.3 Fonction négligeable devant une autre

5.4.4 Définitions

Définition 39

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 .

On dit que f est **négligeable devant g au voisinage de x_0** s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telle que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

On note alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$$

Remarques :

R1 – Lorsque $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$, $g(x)$ est **prépondérant devant $f(x)$ au voisinage de x_0** .

R2 – Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 (sauf éventuellement en x_0), alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Exemples :

E1 – Fonctions puissances :

$$\text{si } \alpha < \beta, \quad x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$$

$$\text{si } \alpha < \beta, \quad x^\beta \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^\alpha)$$

E2 – Puissances et Logarithmes :

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad (\ln(x))^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$$

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad (\ln(x))^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

E3 – Puissances et Exponentielles :

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad x^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\beta x})$$

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad e^{\beta x} \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

E4 – Logarithmes et Exponentielles :

$$\forall \alpha, \beta > 0, \quad (\ln(x))^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\beta x})$$

5.4.5 Propriétés

- l'addition

$$\text{si } f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x)) \quad \text{et } f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x)), \quad \text{alors } f_1(x) + f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$$

- la multiplication par un scalaire $\alpha \neq 0$

$$\text{si } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(kg(x)), \quad \text{alors } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$$

$$\text{si } kf(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x)), \quad \text{alors } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$$

- la multiplication par une fonction.

Soit u une fonction qui ne s'annule pas au voisinage de x_0 . Alors :

$$\text{si } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x)), \quad \text{alors } u(x)f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(u(x)g(x))$$

$$\text{si } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x)), \quad \text{alors } \frac{f(x)}{u(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{=} o\left(\frac{g(x)}{u(x)}\right)$$

- le produit.

$$\text{si } f_1(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g_1(x)) \quad \text{et } f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g_2(x)), \quad \text{alors } f_1(x)f_2(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g_1(x)g_2(x))$$

- la valeur absolue.

$$\text{si } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x)), \quad \text{alors } |f(x)| \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(|g(x)|)$$

- l'inverse.

Soit f une fonction qui ne s'annule pas au voisinage de x_0 . Alors :

$$\text{si } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x)), \quad \text{alors } \frac{1}{g(x)} \underset{x \rightarrow x_0}{=} o\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

- changement de variable.

Soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit u une fonction définie au voisinage de t_0 avec $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = x_0$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{si } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x)), \quad \text{alors } f(u(t)) \underset{t \rightarrow t_0}{=} o\left(g(u(t))\right)$$

- transitivité

$$\text{si } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x)) \quad \text{et } g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(h(x)), \quad \text{alors } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(h(x))$$

Proposition 40

Lien entre équivalence et négligeabilité

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1.

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) \iff f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x)) \iff g(x) - f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(f(x))$$

2.

$$\text{si } g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(f(x)), \quad \text{alors } f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$$

3.

$$\text{si } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(u(x)) \quad \text{et } u(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} v(x), \quad \text{alors } f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(v(x))$$