CHAPITRE 3

Les ensembles

3.1 Théorie générale des ensembles

3.1.1 Définitions

Définition 1

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des objets mathématiques. On forme alors l'**ensemble** $E = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$.
On dit alors que chaque u_i (pour $1 \leqslant i \leqslant p$) est **un élément** de l'ensemble E, ou autrement dit que u_i appartient à E et on écrit "$u_i \in E$".

Remarque :

Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. L'ordre des éléments n'est pas important. Ainsi, les ensembles :

$$\{1,2\}, \qquad \{2,1\}, \qquad \{1,1,2,2,2\}$$

sont en réalité le même ensemble au sens mathématique.

Définition 2

Le nombre d'éléments distincts d'un ensemble E est appelé le **cardinal** de E, on le note $Card(E)$.
Un ensemble est **fini** si son cardinal est un entier naturel, i.e. s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, on dit qu'il est **infini**.

Exemples :

- **E 1** – $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
- **E 2** – $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.
- **E 3** – L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est un ensemble de cardinal 0.
- **E 4** – L'ensemble $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ est de cardinal 4.
- **E 5** – Pour tous entiers naturels m et n, on note si $m \leqslant n$: $[\![m, n]\!] = \{m, m+1, m+2, \ldots, n-1, n\}$.
  Par exemple l'ensemble $[\![1, n]\!]$ désigne l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$.

3.1.2 Parties d'un ensemble

Définition 3

Soient E et F deux ensembles. On dit que F **est inclus dans** E et on écrit "$F \subset E$" si tout élément de l'ensemble F est aussi un élément de l'ensemble E, i.e.

$$\boxed{F \subset E \iff \forall x \in F,\ x \in E}$$

Lorsque $F \subset E$, on dit que F est une **partie** ou un **sous-ensemble** de E.

Exemples :

- **E 1** – On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- **E 2** – Lorsqu'on a un ensemble E, il est courant de considérer un sous-ensemble F des éléments de E vérifiant une certaine propriété :

$$E = \mathbb{R}, \quad F = \{x \in E \ /\ x^2 - 5x + 4 < 0\}$$

Par exemple, on note $\boxed{\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}}$, $\boxed{\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}}$, $\boxed{\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}}$.

Remarque :

Pour montrer qu'on a une inclusion d'un ensemble dans un autre, on raisonne avec une implication :

$$F \subset E \iff \text{si } x \in F, \text{ alors } x \in E \text{ aussi}$$

Proposition 4

Soient E, F et G trois ensembles. Alors

1. *$\emptyset \subset E$ et $E \subset E$.*
2. ***Transitivité** : si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.*
3. ***Double inclusion** :*

$$\boxed{E = F \quad \iff \quad E \subset F \text{ et } F \subset E}$$

Remarque :

Pour montrer qu'on a une égalité d'un ensemble dans un autre, on raisonne donc avec une équivalence :

$$\begin{aligned} E = F &\iff (\ x \in E \iff x \in F) \\ &\iff \begin{cases} \text{si } x \in E, \text{ alors } x \in F \\ \text{si } x \in F, \text{ alors } x \in E \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 5

Soit E un ensemble fini et soit A un sous-ensemble de E.
Alors A est également un ensemble fini et $Card(A) \leqslant Card(E)$.
Si de plus, on a $Card(A) = Card(E)$, alors nécessairement $A = E$.

Définition 6

Pour tout ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble formé par toutes les parties de E.

Remarque :

$\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont chacun des éléments est un ensemble

3.1.3 Intersection et union d'ensembles

Définition 7

Soient E et F deux ensembles.

- On appelle **intersection de E et F**, notée $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément à E et à F.
- On appelle **union de E et F**, notée $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F, i.e. dans au moins un des deux ensembles.

Deux ensembles E et F vérifiant $E \cap F = \emptyset$ sont dits **disjoints**.

Proposition 8

La relation d'intersection est :

- ***commutative*** *:* $A \cap B = B \cap A$
- ***associative*** *:* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- *vérifie* $A \cap A = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$

La relation de réunion est :

- ***commutative*** *:* $A \cup B = B \cup A$
- ***associative*** *:* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- *vérifie* $A \cup A = A$ *et* $A \cup \emptyset = A$

L'intersection et la réunion vérifient :

- ***la distributivité de $\cap$ sur $\cup$*** *:* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- ***la distributivité de $\cup$ sur $\cap$*** *:* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Remarque :

On peut généraliser ces notations : si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles, on note :

- leur réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$, définie par : $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I \ / \ x \in A_i$.
- leur intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$, définie par : $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I,\ x \in A_i$.

Proposition 9 ***Formule de Poincaré***

Soient E, F deux ensembles finis. On a :

$$Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$$

En particulier, si E et F sont disjoints, on a $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F)$.

Proposition 10 ***Formule du Crible***

Soient E, F et G trois ensembles finis. Alors le cardinal de $E \cup F \cup G$ est égal à

$$Card(E) + Card(F) + Card(G) - Card(E \cap F) - Card(F \cap G) - Card(E \cap G) + Card(E \cap F \cap G)$$

3.1.4 Complémentaire d'une partie

Définition 11

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **complémentaire de A dans E**, et on note $E \setminus A$, (ou ${}^cA$ ou $\overline{A}$ si aucune confusion n'est possible) l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$E \setminus A = {}^cA = \overline{A} = \{x \in E,\ x \notin A\}$$

Proposition 12

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

1. ${}^cE = \emptyset$
2. ${}^c\emptyset = E$
3. ${}^c({}^cA) = A$
4. $({}^cA) \cap A = \emptyset$
5. $({}^cA) \cup A = E$
6. ${}^c(A \cup B) = ({}^cA) \cap ({}^cB)$
7. ${}^c(A \cap B) = ({}^cA) \cup ({}^cB)$

3.1.5 Produit cartésien d'ensembles

Définition 13

On appelle **produit cartésien** de n ensembles E_1, E_2, …, E_n, l'ensemble des suites finies :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\}$$

En particulier, lorsque les E_i sont tous identiques, on le note simplement E^n.

Exemples :

E 1 – $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ désigne l'ensemble des couples (x, y) de réels.

E 2 – $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ désigne l'ensemble des triplets (x, y, z) de réels.

E 3 – La notation "$(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$" signifie que x est un réel, et que n est un entier naturel.

Remarque :

Lorsqu'on veut écrire une phrase pour tous réels x et y, on peut donc écrire ceci de deux façons :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \ldots \qquad \text{ou bien} \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ldots$$

3.2 L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels

3.2.1 Relation d'ordre

Remarques :

R 1 – L'ensemble $\mathbb{R}$ est non vide et ses éléments sont appelés les **nombres réels**.

R 2 – L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre, notée $\leqslant$, vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant x$ (réflexivité)
- Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$ (transitivité)
- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$.
- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a forcément soit $x \leqslant y$ soit $y \leqslant x$, on dit que l'**ordre est total** sur $\mathbb{R}$.
- La relation $\leqslant$ est compatible avec $+$:

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \qquad \underline{\text{si}}\ a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d,\ \underline{\text{alors}}\ a + c \leqslant b + d$$

- La relation $\leqslant$ est compatible avec la multiplication par un réel **positif** :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall \lambda \geqslant 0, \qquad \underline{\text{si}}\ a \leqslant b\ \underline{\text{alors}}\ \lambda a \leqslant \lambda b$$

R 3 – Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow -a \geqslant -b$$

R 4 – Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\text{si}\ \ a \leqslant b \quad \text{et } c < d,\ \underline{\text{alors}}\ a + c < b + d$$

R 5 – Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\text{si}\ \ 0 \leqslant a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d,\ \underline{\text{alors}}\ 0 \leqslant ac \leqslant bd$$

R 6 – Pour tous réels a et b, on a :

$$ab > 0 \quad \Longleftrightarrow (x > 0 \text{ et } y > 0) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } y < 0)$$

3.2.2 Exposants et racines

Définition 14

Pour tout nombre réel x, on pose $x^0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x^n = \underbrace{x \times x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$$

Lorsque $x \neq 0$, on définit également :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Remarques :

R 1 – Pour tout réel x de $\mathbb{R}$, pour tous entiers n et p de $\mathbb{Z}$, on a :

$$x^n \times x^p = x^{n+p}, \qquad (x^n)^p = x^{np} = (x^p)^n, \qquad \frac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$$

R 2 – Pour tous réels x et y et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(x \times y)^n = x^n \times y^n \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

Définition 15

Soit n un entier naturel non nul.

- Si <u>n **est pair**</u>, alors pour tout nombre réel <u>positif</u> x, il existe un unique réel positif ou nul y tel que $y^n = x$. Ce nombre est alors noté $\sqrt[n]{x}$, appelé **racine n-ième de x**.

- Si <u>n **est impair**</u>, alors pour tout nombre réel x, il existe un unique réel y tel que $y^n = x$. Ce nombre est alors noté $\sqrt[n]{x}$, appelé **racine n-ième de x**.

Remarques :

R 1 – On a $(\sqrt[n]{x})^n = x$ (lorsque cela a un sens).

R 2 – $\sqrt[n]{x}$ est du même signe que x (lorsque cela a un sens).

R 3 – On note $\sqrt{x}$ pour $\sqrt[2]{x}$ lorsque x est positif ou nul.

3.2.3 Valeur absolue d'un réel

Définition 16

Soit x un réel. On appelle **valeur absolue de x**, le réel noté $|x|$, défini par : $\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$.

Remarques :

R 1 – Pour tout réel x, $|x|$ désigne la partie numérique du réel x, c'est-à-dire la valeur de x sans son éventuel signe

R 2 – Pour tout réel x, on a : $|x| = \max(x,\ -x)$.

R 3 – Pour tout réel x, on a : $|x| = 0 \iff x = 0$.

R 4 – Pour tout $a > 0$, on a : $|x| = a \iff \quad x = a$ ou $x = -a$.

R 5 – Pour tout $a > 0$, on a : $|x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a$.

Proposition 17

1. *Soient a et b deux réels. On a :* $\left|a \times b\right| = |a| \times |b|$.
2. *Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$. On a :* $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.
3. *Soit x un réel. On a :* $|x|^2 = \left|x^2\right| = x^2$.
   Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|x^n\right| = |x|^n$.
4. *Pour tous réels a et b, on a :* $a^2 \leqslant b^2 \iff |a| \leqslant |b|$.
5. *Pour tout réel x, on a :* $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.

Théorème 18 ***Inégalité triangulaire***

Pour tous réels x et y, on a :

$$\boxed{\left|x+y\right| \leqslant \left|x\right| + \left|y\right|}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\big(|x+y|\big)^2 &= (x+y)^2\\ &= x^2+2xy+y^2\\ &= |x|^2+2xy+|y|^2\\ &\leqslant |x|^2+2|x|.|y|+|y|^2\\ &= \big(|x|+|y|\big)^2\end{aligned}$$

On a donc $\big(|x+y|\big)^2 \leqslant \big(|x|+|y|\big)^2$ et puisque $|x+y|$ est positif et que $|x|+|y|$ est positif, on en déduit que :

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|$$

Remarque :

On peut généraliser cette inégalité :
Pour tous réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a :

$$\boxed{|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|}$$

autrement dit :

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|}$$

3.2.4 Partie entière d'un réel

Définition 19

La **partie entière d'un réel** x est le plus grand entier qui est inférieur ou égal à x. On la note $\mathrm{Ent}(x)$.
On a donc par définition, pour tout réel x :

$$\boxed{\mathrm{Ent}(x) \leqslant x < \mathrm{Ent}(x)+1}$$

et

$$\boxed{x-1 < \mathrm{Ent}(x) \leqslant x}$$

Remarque :

Attention, la partie entière ne correspond pas forcément au "chiffre se trouvant avant la virgule", cela ne marche que pour les nombres positifs. On a par exemple : $\mathrm{Ent}(2.56) = 2$ et $\mathrm{Ent}(-4.86541) = -5$.

3.2.5 Majorant, minorant, plus grand ou plus petit élément

Définition 20

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'un réel M est un **majorant de A** si : $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
- On dit que **A est majorée** si elle admet un majorant :

$$\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in A,\ x \leqslant M$$

- Si A possède un majorant qui est dans A, alors cet élément est unique et on l'appelle le **plus grand élément de A**, noté $\max(A)$.
- On dit qu'un réel m est un **minorant de A** si : $\forall x \in A,\ x \geqslant m$.
- On dit que **A est minorée** si elle admet un minorant :

$$\exists m \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in A,\ x \geqslant m$$

- Si A possède un minorant qui est dans A, alors cet élément est unique et on l'appelle le **plus petit élément de A**, noté $\min(A)$.
- On dit que A est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée

Théorème 21 ***Axiome de la borne supérieure***

- *Si une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée, alors elle admet un plus petit majorant, que l'on appelle sa* ***borne supérieure****, noté* $\sup(A)$.
- *Si une partie A de $\mathbb{R}$ est minorée, alors elle admet un plus grand minorant, que l'on appelle sa* ***borne inférieure****, noté* $\inf(A)$.