CHAPITRE 18

Espaces probabilisés finis

18.1 Expériences aléatoires

18.1.1 Vocabulaire

Définition 1

On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont le résultat ne peut être déterminé a priori, c'est-à-dire qui dépend du hasard.

Exemple :

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note le résultat. On effectue donc une expérience aléatoire.

Définition 2

On appelle **univers** de l'espérience aléatoire l'ensemble Ω des issues ou résultats possibles de l'expérience. Les éléments de Ω se notent souvent ω.

Exemples :

E 1 – On lance un dé et on note le résultat, l'univers de l'expérience est alors :

$$\Omega = [\![1, 6]\!]$$

E 2 – On lance une pièce et on regarde si elle tombe sur Pile ou Face, l'univers est alors :

$$\Omega = \{\text{pile}, \ \text{face}\}$$

E 3 – On choisit simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes, l'univers est alors l'ensemble des sous-ensembles de 5 éléments (sans ordre) parmi les 32 cartes.

E 4 – Si on lance trois fois un dé à six faces et que l'on note les trois résultats, on réalise une expérience dont l'univers est

$$\Omega = \{(x, y, z) \ / \ x, y, z \in [\![1, 6]\!]\}$$

E 5 – Si on choisit au hasard un réel compris entre 0 et 1, l'univers de l'expérience est $[0, 1]$.

Définition 3
On appelle **événement** toute partie de l'univers Ω de l'expérience aléatoire.

Remarques :

R 1 – Lorsqu'on regarde l'expérience aléatoire, un événement est un fait lié à cette expérience pouvant se produire ou non.

R 2 – L'ensemble des événements est donc l'ensemble des parties de Ω, c'est donc $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemples :

E 1 – On lance un dé et on regarde le résultat.
Regardons l'événement A : "le chiffre obtenu est un nombre pair".
L'événement A est réalisé lorsque le résultat est 2, 4, 6. On écrit alors

$$A = \{2, 4, 6\}$$

E 2 – Un événement qui est toujours réalisé est appelé un **événement certain**, il est donc représenté par l'ensemble Ω

E 3 – Un événement qui n'est jamais réalisé est appelé un **événement impossible**, il est représenté par l'ensemble vide $\emptyset$.

Remarque :

Un événement est une partie de Ω, donc peut être vu comme un sous-ensemble de Ω. On garde donc exactement le même vocabulaire pour les événements que pour les ensembles.

- L'événement contraire de A est représenté par le complémentaire de A dans Ω que l'on note $\overline{A}$.
- L'événement "A et B sont réalisés" est représenté par $A \cap B$
- L'événement "A ou B est réalisé" est représenté par $A \cup B$
- On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas être réalisés simultanément, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.
- L'événement "A est réalisé et B n'est pas réalisé" est représenté par $A \setminus B$.
- On dit que "l'événement A implique l'événement B" si la réalisation de A entraîne la réalisation de B, c'est-à-dire si $A \subset B$.

Définition 4
Les événements qui sont représentés par un singleton $\{\omega\}$ sont appelés des **événements élémentaires**.

Exemple :

Si on lance un dé et qu'on note le résultat, l'événement "obtenir 2" $A = \{2\}$ est un évenement élémentaire. L'événement "Obtenir un nombre pair" $B = \{2, 4, 6\}$ n'est pas un événement élémentaire.

18.2 Espaces probabilisés lorsque Ω est fini

18.2.1 Probabilité sur un ensemble fini

Définition 5

Soit Ω un ensemble fini et soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties.
Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ s'appelle un **espace probabilisable**.

Remarque :

L'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifie plusieurs propriétés fondamentales : on dit que c'est une **tribu**. En effet :

(i) $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$

(ii) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \overline{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$

(iii) $\forall A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{P}(\Omega),\ \bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{P}(\Omega)$

($\mathcal{P}(\Omega)$ est stable par passage au complémentaire, et est stable par réunion.)

Définition 6

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** définie sur cet espace, toute application :

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

qui vérifie :

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) Si A et B sont deux événements incompatibles, alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ s'appelle un **espace probabilisé fini** et pour tout événement A, le réel $\mathbb{P}(A)$ s'appelle la **probabilité de l'événement A**.

18.2.2 Propriétés

Proposition 7

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et soient A et B deux événements. Alors

1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2. *En particulier,* $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$
3. $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
4. *Si* $A \subset B$, *alors* $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Remarque :

La formule du Crible est donc vraie dans le cas général. On a par exemple pour trois ensembles :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

18.2.3 Evenements élémentaires

Définition 8

Soit Ω un ensemble fini : $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.
Les événements $\{\omega_i\}$ sont appelés les **événements élémentaires**.

Proposition 9

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Pour tout événement A, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\{\omega \ / \ \omega \in A\}\right) = \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$$

En particulier, si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\omega_k) = 1$$

Remarque :

On voit avec cette propriété que pour déterminer entièrement une propriété $\mathbb{P}$, c'est-à-dire être capable de calculer $\mathbb{P}(A)$ pour n'importe quel événement A, il suffit de savoir calculer les probabilités des événements élémentaires.
L'ensemble des valeurs $(\mathbb{P}(\omega_1), \mathbb{P}(\omega_2), \dots, \mathbb{P}(\omega_n))$ est appelé la **loi de probabilité de $\mathbb{P}$**.

18.2.4 Le modèle d'équiprobabilité

Définition 10

Soit Ω un ensemble fini. On dit que l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est en **situation d'équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité.
Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, l'équiprobabilité se traduit par :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \mathbb{P}(\omega_k) = \frac{1}{n}$$

Démonstration :

Supposons que $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ et supposons que tous les événements élémentaires soient équiprobables, i.e. qu'il existe un réel $a \in [0, 1]$ tel que

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \cdots = \mathbb{P}(\omega_n) = a$$

Alors, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\omega_k) = 1 \iff \sum_{k=1}^{n} a = 1 \iff na = 1 \iff a = \frac{1}{n}$$

Théorème 11 ***Formule dans le cas d'équiprobabilité***

Si un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est en situation d'équiprobabilité, alors pour tout événement A, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\textit{Nombre de cas favorables à } A}{\textit{Nombre de cas total}}}$$

Remarque :

Dans le modèle d'équiprobabilité, calculer la probabilité d'un événement A revient à un "simple" problème de dénombrement des différents cas favorables à cet événement A

Exemples :

E 1 – On lance un dé équilibré. On a $\Omega = [\![1, 6]\!]$.
Les événements sont alors tous équiprobables.

E 2 – On lance deux dés équilibrés. On a $\Omega = \{(i, j),\ i, j \in [\![1, 6]\!]\}$
Les événements sont alors tous équiprobables.

Remarque :

ATTENTION ! La situation d'équiprobabilité est un cas très très particulier. Dans la plupart des cas, on est au contraire en non-équiprobabilité.

Exemples :

E 1 – On lance un dé truqué : à cause d'un problème de construction du dé, le 6 a deux fois plus de chance de sortir que toutes les autres faces (qui elles sont équiprobables).
Considérons $\Omega = [\![1, 6]\!]$. Alors

$$\mathbb{P}(\{6\}) = \frac{2}{7}, \qquad \mathbb{P}(\{1\}) = \mathbb{P}(\{2\}) = \cdots = \mathbb{P}(\{5\}) = \frac{1}{7}$$

les événements élémentaires ne sont pas équiprobables.

Solution : on peut considérer que cela revient à avoir le lancer d'un dé équilibré à 7 faces comportant 2 fois le chiffre 6 et une fois les autres chiffres. On pose $\Omega' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6_A, 6_B\}$ et alors les issues élémentaires sont bien équiprobables.

E 2 – On lance deux dés équilibrés. Soit A l'événement "la somme des deux dés est supérieure à 4". Calculer $\mathbb{P}(A)$. On a ici :

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

c'est l'ensemble des sommes possibles pour les deux dés. Mais, même si les dés sont équilibrés, les événements élémentaires ne sont pas équiprobables ici !

En effet, par exemple $\mathbb{P}(\{2\}) < \mathbb{P}(\{8\})$: la somme des deux dés a "moins de chance" de valoir 2 (double 1) que de valoir 8 (qui arrive dès qu'on a $3 + 5$, $4 + 4$ ou $6 + 2$).

$$\mathbb{P}(A) \neq \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{9}{11}$$

Solution : on décrit alors le résultat de l'expérience à l'aide de l'univers :

$$\Omega' = [\![1, 6]\!]^2 = \{(d_1, d_2),\ d_1, d_2 \in [\![1, 6]\!]\}$$

En effet, sur Ω' cette fois, on a vraiment un modèle d'équiprobabilité et on peut calculer :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card\left(\{(d_1, d_2)\ /\ d_1, d_2 \in [\![1, 6]\!], d_1 + d_2 \geqslant 4\}\right)}{Card(\Omega')} = \frac{33}{36}$$

18.2.5 Systèmes complets d'événements

Définition 12

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **système complet d'événements de Ω** toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

(i) Les événements A_i sont deux à deux incompatibles.

(ii) $\Omega = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$

Exemple :

On lance un dé équilibré. On a $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

- La famille d'événements $(\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\})$ est le système complet d'événements composé des événements élémentaires.
- On note A l'événement "obtenir un nombre pair" et B l'événement "obtenir un nombre impair". Alors (A,B) forme un système complet d'événements.

Proposition 13

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements. Alors

$$\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 1$$

18.3 Probabilités conditionnelles

18.3.1 Définition

Théorème - Définition 14

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit A un événement de probabilité non nulle.
Pour tout évenement B, on définit la **probabilité de B sachant A** par :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Alors la fonction $P_A : (\Omega, \mathcal{A}) \to [0,1]$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. On note parfois $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B|A)$.

Remarque :

Comme $\mathbb{P}_A$ est une probabilité, on peut appliquer toutes les propriétés vues précédemment pour les probabilités en général

Proposition 15

1. $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}_A(B)$
2. *Si $C \subset B$, alors $\mathbb{P}_A(C) \leqslant \mathbb{P}_A(B)$*
3. $\mathbb{P}_A(B\cup C) = \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(C) - \mathbb{P}_A(B\cap C)$

18.3.2 Grandes formules probabilistes

Remarque :

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, alors par définition, on a : $\boxed{\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}$. Cette formule peut être généralisée de la façon suivante :

Proposition 16 — ***Formule des Probabilités Composées***

Soient A, B, C trois événements tels que $\mathbb{P}(A \cap B) \neq 0$, alors

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}_{A\cap B}(C)$$

Soient $A_1, \ldots, A_n$ une famille d'événements telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\ldots\mathbb{P}_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)}$$

Remarque :

Lorsqu'on fait par exemple des tirages SUCESSIFS et SANS REMISE, alors le deuxième tirage dépend du résultat du premier tirage, autrement dit, pour obtenir des informations sur la deuxième boule tirée, il faut conditionner par le résultat du premier tirage. Puis, le troisième tirage dépend des résultats des deux premiers tirages.

Exemple :

Une urne contient 3 boules blanches et 7 noires. On tire successivement trois boules sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir les 3 boules blanches ? On note

$$\forall k \in [\![1, 3]\!], B_k : \text{"obtenir une boule blanche au } k\text{-ième tirage"}$$

On note $A = B_1 \cap B_2 \cap B_3$ l'événement cherché : obtenir trois boules blanches. Alors d'après la formule :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3)$$

On a $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{3}{10}$ (3 blanches sur 10 boules au total).
On a $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \dfrac{2}{9}$ (il reste alors 2 blanches sur 9 boules au total).
On a $\mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3) = \dfrac{1}{8}$ (il reste alors 1 blanche sur 8 boules au total).
Finalement, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$$

Théorème 17 — ***Formule des probabilités totales***

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors pour tout événement B, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

Remarque :

Cela signifie simplement que si (A_i) est un système complet d'événements, alors lorsqu'un événement B se réalise, il se réalise soit avec A_1, soit avec A_2, soit avec A_3, ...

Théorème 18 ***Formule de Bayes***

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et soit B un événement de probabilité non nulle. Alors pour tout $i_0 \in I$, on a :

$$\mathbb{P}_B(A_{i_0}) = \frac{\mathbb{P}(A_{i_0})\mathbb{P}_{A_{i_0}}(B)}{\sum\limits_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer la définition de la probabilité conditionnelle et la formule des Probabilités Totales :

$$\mathbb{P}_B(A_{i_0}) = \frac{\mathbb{P}(A_{i_0}\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_{i_0})\mathbb{P}_{A_{i_0}}(B)}{\sum\limits_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)}$$

18.3.3 Événements indépendants

Définition 19

On dit que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité $\mathbb{P}$ si :

$$\boxed{\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}$$

Remarques :

R 1 – Si A et B sont deux événements indépendants (de probabilité non nulle), alors on a

$$\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B), \qquad \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$$

R 2 – La notion d'indépendance dépend de la probabilité $\mathbb{P}$ choisie sur les événements élémentaires. Elle dépend donc de la modélisation choisie.

Proposition 20

Soient A et B deux événements indépendants, alors :

1. *A et $\overline{B}$ sont indépendants,*
2. *$\overline{A}$ et B sont indépendants,*
3. *$\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.*

Démonstration :

Par exemple pour le premier :
On a $A = A\cap\Omega = A\cap(B\cup\overline{B}) = (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$ et ces deux événements sont incompatibles, donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A\cap\overline{B}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{B} + \mathbb{P}(A\cap\overline{B})$$

donc

$$\mathbb{P}(A\cap\overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\left(1-\mathbb{P}(B)\right) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$$