CHAPITRE 17

Dénombrement

17.1 Dénombrement des listes

17.1.1 Dénombrement des p-listes

Définition 1

On appelle **p-liste** ou **p-uplet** d'un ensemble E tout élément de E^p, i.e. un élément de la forme

$$(x_1, \dots, x_p), \text{ avec } \forall i \in [\![1, p]\!], x_i \in E$$

Théorème 2

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors, le nombre de p-listes d'éléments de E est égal à n^p.

Démonstration :

Cela vient du fait que $Card(E^p) = (Card(E))^p$

Remarque :

On utilise les p-listes en cas de choix successifs de p éléments d'un ensemble, avec éventuelles répétitions

17.1.2 Arrangements et permutations

Définition 3

Soit E un ensemble et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **p-arrangement de E** ou **arrangement de p éléments de E** toute suite de p éléments distincts de E.

Si E contient n éléments, on note A_n^p le nombre d'arrangement à p éléments d'un ensemble à n éléments

Remarque :

Si $p > n$, il ne peut pas y avoir de p-arrangements dans l'ensemble E. On a alors $A_n^p = 0$.

Théorème 4

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \leqslant n$. Alors le nombre de p-arrangements A_n^p de l'ensemble E est égal à

$$A_n^p = \boxed{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

*où on a noté $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$, appelé **factorielle** n.*

Démonstration :

Pour dénombrer les p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p dont les éléments sont distincts deux à deux, :

- on commence par choisir x_1 parmi les n éléments de E
- puis on choisit x_2 parmi les $n-1$ éléments de E distincts de x_1
- puis on choisit x_2 parmi les $n-2$ éléments de E distincts de x_1 et x_2
- ...
- puis on choisit x_p parmi les $n-p+1$ éléments de E distincts de $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$.

Il y a donc bien $n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ p-arrangements de E.

Remarque :

On utilise les arrangements en cas de choix succesifs de p éléments pris parmi n, sans répétition

Définition 5

Soit E un ensemble à n éléments. Un n-arrangement de E est appelé une **permutation de E**. Une permutation est donc un n-uplet constitué, dans un certain ordre, des n éléments de E.

Théorème 6

Soit E un ensemble à n éléments. Alors il y a $n!$ permutations de E. Autrement dit, il y a $n!$ façons de ranger n éléments distincts dans tous les ordres possibles.

Remarque :

On utilise les permutations dans les cas où on veut ordonner tous les éléments d'un ensemble sans répétition

17.2 Dénombrement des combinaisons

17.2.1 Définitions

Définition 7

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle **combinaison de p éléments de E** toute partie de E qui contient p éléments. On note le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble de n éléments : $\binom{n}{p}$, qui se lit "p parmi n".

Remarques :

R 1 – Les éléments d'une combinaison de p éléments sont deux à deux distincts.

R 2 – Si $p > n$ ou si $p < 0$ on a $\binom{n}{p} = 0$

R 3 – L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

R 4 – Les nombres $\binom{n}{p}$ sont bien les **coefficients binomiaux**, définis avec les factorielles (ch.2).

Théorème 8

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $0 \leqslant p \leqslant n$. Alors, le nombre de combinaisons de p éléments parmi un ensemble à n éléments est égal à

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\cdots 1}$$

Démonstration :

Il suffit de montrer que : $A_n^p = p!\binom{n}{p}$.

Deux p-arrangements d'éléments de $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ont le même support si ils sont formés des mêmes éléments mais pas nécessairement dans le même ordre. On peut alors ranger tous les p-arrangements en catégories en mettant ensemble tous ceux qui ont le même support. On remarque alors que le nombre de catégories est $\binom{n}{p}$ et que chaque catégorie comporte $p!$ arrangements.

Remarque :

On retiendra que l'on utilise les combinaisons dans les problèmes de choix simultanés de p éléments choisis parmi n, sans considération d'ordre et sans répétition.

17.2.2 Formules des coefficients binomiaux par le dénombrement

Théorème 9 ***Formule de symétrie***

Soient n et p deux entiers. Alors : $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$.

Démonstration :

En effet, chaque combinaison de p éléments de E peut être associée à une et unique partie de $n-p$ éléments de E : son complémentaire. Et réciproquement chaque combinaison de $n-p$ éléments de E est le complémentaire d'exactement une seule combinaison de p éléments.

Les nombres de telles combinaisons sont donc les mêmes : on a bien $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Théorème 10 ***Formule de Pascal***

Soient n et p deux entiers naturels. Alors : $\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}}$.

Démonstration :

Soit $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble de n élements. On sait que $\binom{n}{p}$ désigne l'ensemble des p-combinaisons choisies parmi E. On partage toutes ces p-combinaisons en deux parties : celles qui contiennent x_n (c'est la partie A) et celles qui ne contiennent pas x_n (c'est la partie B).

Les éléments de la partie A sont des p-combinaisons de E qui contiennent x_n. Il y en autant que de manières de choisir les $p-1$ éléments qui accompagnent x_n dans la p-combinaison : autrement dit, on doit choisir $p-1$ éléments parmi les $n-1$ éléments de $E \setminus \{x_n\}$. Ainsi $Card(A) = \binom{n-1}{p-1}$.

Les éléments de la partie B sont des p-combinaisons de E qui ne contiennent pas x_n. Il y en autant que de manières de choisir les p éléments dans la p-combinaison : autrement dit, on doit choisir p éléments parmi les $n-1$ éléments de $E \setminus \{x_n\}$. Ainsi $Card(B) = \binom{n-1}{p}$

Comme (A, B) forme une partition de l'ensemble des p-combinaisons de E, on a $Card(E) = Card(A) + Card(B)$, d'où le résultat.

Théorème 11 ***Formule de Vandermonde***

Soient n, m et p trois entiers naturels. Alors $\boxed{\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}}$.

Démonstration :

Considérons un ensemble comportant $n+m$ éléments, disons n éléments $x_1, x_2, \dots, x_n$ qui forment un ensemble A et m éléments $y_1, y_2, \dots, y_m$ qui forment un ensemble B.

$\binom{n+m}{p}$ représente le nombre de p-combinaisons choisies parmi l'ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m\}$.
Partageons ces p-combinaisons en plusieurs groupes :

- Celles qui possèdent 0 élément de A et p éléments de B : il y en a exactement $\binom{n}{0}\binom{m}{p}$
- Celles qui possèdent 1 élément de A et $p-1$ éléments de B : il y en a exactement $\binom{n}{1}\binom{m}{p-1}$
- ...
- Celles qui possèdent p éléments de A et 0 élément de B : il y en a exactement $\binom{n}{p}\binom{m}{0}$.

Au final, on a donc bien

$$\binom{n+m}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$$

Théorème 12 ***Formule du Binôme de Newton***

Soient a et b deux nombres réels et n un entier. Alors $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$.

Démonstration :

On sait que $(a+b)^n = (a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)$, où le facteur $(a+b)$ apparaît exactement n fois.

En développant ce produit, on va obtenir une somme de produits de n facteurs, chacun étant choisi dans un des facteurs $(a+b)$. Chaque terme de la somme va donc être de la forme $\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{k \text{ facteurs}} \times \underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{n-k \text{ facteurs}} = a^k b^{n-k}$, où k est un entier compris entre 0 et n.

Chaque terme $a^k b^{n-k}$ va apparaître plusieurs fois dans la somme. Combien exactement ? Autant de fois qu'on pourra choisir k fois le terme a sur les n, autrement dit $\binom{n}{k}$ fois. On a donc $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Théorème 13 ***Nombre de parties d'un ensemble fini***

Si E est un ensemble à n éléments, alors $\boxed{Card\left(\mathcal{P}(E)\right) = 2^n}$.

Démonstration :

Notons pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, E_k l'ensemble des parties de E à k éléments. Alors, la famille $(E_0, E_1, \dots, E_n)$ est une partition de $\mathcal{P}(E)$. De plus, on sait que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $Card(E_k) = \binom{n}{k}$.

Ainsi $Card(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} Card(E_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.