

## Intégration sur un segment

### 16.1 Primitives d'une fonction

#### 16.1.1 Définitions

##### Définition 1

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

On dit qu'une fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  est **une primitive de  $f$  sur  $I$**  si :

- $F$  est dérivable sur  $I$
- $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

##### Exemples :

**E1** – La fonction sin est une primitive de la fonction cos sur  $\mathbb{R}$

**E2** – La fonction  $x \mapsto \sin(x) + 2$  est également une primitive de la fonction cos sur  $\mathbb{R}$ .

##### Proposition 2

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors les primitives de  $f$  (si elles existent) diffèrent d'une constante.

Plus précisément, si  $F_0$  est une primitive de  $f$ , alors l'ensemble des primitives de  $f$  est :

$$\{x \mapsto F_0(x) + k, k \in \mathbb{R}\}$$

##### Démonstration :

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $F_0$  une primitive de  $f$ .

Notons  $E$  l'ensemble de toutes les primitives de  $f$ . On veut montrer que :

$$E = \{x \mapsto F_0(x) + k, k \in \mathbb{R}\}$$

$\square$  Soit  $k \in \mathbb{R}$  et soit  $G : x \mapsto F_0(x) + k$ . La fonction  $G$  est alors déjà bien dérivable sur  $I$  par somme de fonctions dérivables sur  $I$ . De plus,  $\forall x \in I, G'(x) = F_0'(x) + 0 = f(x)$ .

Ainsi, on a bien  $G \in E$ .

□ Soit  $F \in E$  :  $F$  est dérivable sur  $I$  et  $F' = f$ .

Posons alors  $\forall x \in I$ ,  $\varphi(x) = F(x) - F_0(x)$ .

Par somme de fonctions dérivables,  $\varphi$  est dérivable sur  $I$  et  $\forall x \in I$ ,  $\varphi'(x) = F'(x) - F_0'(x) = f(x) - f(x) = 0$ .

On en déduit que  $\varphi$  est constante sur  $I$  :

$$\exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in I, \varphi(x) = k \implies F(x) = F_0(x) + k$$

et ainsi,  $F \in \{x \mapsto F_0(x) + k, k \in \mathbb{R}\}$ .

### Remarques :

**R1** – Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  admettant au moins une primitive. Soit  $x_0 \in I$ .

Alors il existe une et une seule primitive de  $f$  qui s'annule en  $x_0$ .

**R2** – Si  $F$  et  $G$  sont des primitives de  $f$  et  $g$  sur un intervalle  $I$ , alors :

–  $F + G$  est une primitive de  $f + g$

– Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda F$  est une primitive de  $\lambda f$

– Pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda F + \mu G$  est une primitive de  $\lambda f + \mu g$

## 16.1.2 Primitives et continuité

### Théorème 3

### *Théorème fondamental de l'analyse*

Toute fonction continue  $f$  sur un intervalle  $I$  admet au moins une primitive définie sur  $I$ .

### Remarque :

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ . Alors toute primitive de  $f$  sera dérivable et sa dérivée sera continue, donc toute primitive de  $f$  sera de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

### Exemple :

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ . Elle admet une primitive sur  $\mathbb{R}^*$  qui est :

$$x \mapsto \ln(|x|)$$

(attention à bien penser à la valeur absolue).

Vérifions-le. Posons pour tout  $x \neq 0$ ,  $F(x) = \ln(|x|)$ .

La fonction  $x \mapsto |x|$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et à valeurs dans  $]0, +\infty[$  et la fonction  $t \mapsto \ln(t)$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , donc par composition,  $F$  est bien dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ .

De plus,

$$\forall x > 0, F(x) = \ln(|x|) = \ln(x) \implies \forall x > 0, F'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\forall x < 0, F(x) = \ln(|x|) = \ln(-x) \implies \forall x < 0, F'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

## 16.1.3 Primitives usuelles

| $f(x)$  | $F(x)$ ( $+k \in \mathbb{R}$ )   | Domaine de validité   |
|---|----------------------------------|---|
| 1   | $x$                              | $\mathbb{R}$  |
| $x$   | $\frac{1}{2}x^2$                 | $\mathbb{R}$  |
| $x^2$   | $\frac{1}{3}x^3$                 | $\mathbb{R}$  |
| $\frac{1}{x^2}$   | $-\frac{1}{x}$                   | $] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$   |
| $\frac{1}{2\sqrt{x}}$                                   | $\sqrt{x}$                       | $]0, +\infty[$  |
| $x^n$ ( $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$ )                 | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$           | $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$<br>$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $n < 0, n \neq -1$ |
| $x^\alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ) | $\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ | $]0, +\infty[$  |
| $\frac{1}{x}$   | $\ln x $                         | $]0, +\infty[$ ou $] -\infty, 0[$   |
| $\ln(x)$  | $x \ln(x) - x$                   | $]0, +\infty[$  |
| $e^x$   | $e^x$                            | $\mathbb{R}$  |
| $e^{ax}$ , ( $a \neq 0$ )                               | $\frac{1}{a}e^{ax}$              | $\mathbb{R}$  |
| $\sin(x)$   | $-\cos(x)$                       | $\mathbb{R}$  |
| $\cos(x)$   | $\sin(x)$                        | $\mathbb{R}$  |
| $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$                   | $\tan(x)$                        | $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ , $k \in \mathbb{Z}$                  |
| $\frac{1}{1+x^2}$                                       | $\text{Arctan}(x)$               | $\mathbb{R}$  |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$                                | $\text{Arcsin}(x)$               | $] -1, 1[$  |
| $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$                               | $\text{Arccos}(x)$               | $] -1, 1[$  |

### 16.1.4 Primitives de composées

|  |  |                          |  |
|--|--|--------------------------|--|
| $f(x)$   | $F(x) \text{ ( } +k \in \mathbb{R} \text{)}$ | $f(x)$                   | $F(x) \text{ ( } +k \in \mathbb{R} \text{)}$ |
| $u'(x)u(x)$  | $\frac{1}{2}(u(x))^2$                        | $\frac{u'(x)}{u(x)}$     | $\ln  u(x) $                                 |
| $\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$   | $-\frac{1}{u(x)}$                            | $u'(x)e^{u(x)}$          | $e^{u(x)}$                                   |
| $\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$   | $\sqrt{u(x)}$                                | $u'(x)\sin(u(x))$        | $-\cos(u(x))$                                |
| $u'(x)(u(x))^n \text{ ( } n \in \mathbb{Z}, n \neq -1 \text{)}$                | $\frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1}$                  | $u'(x)\cos(u(x))$        | $\sin(u(x))$                                 |
| $u'(x)(u(x))^\alpha \text{ ( } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1 \text{)}$ | $\frac{1}{\alpha+1}(u(x))^{\alpha+1}$        | $\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$ | $\text{Arctan}(u(x))$                        |

## 16.2 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

### 16.2.1 Définition

#### Définition 4

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $[a, b]$  et soit  $F$  une primitive quelconque de  $f$ . On appelle **intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$**  le réel défini par :

$$\int_a^b f(t)dt = \left[ F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

#### Remarque :

La définition de l'intégrale ne dépend pas de la primitive  $F$  choisie.

Si on avait choisi une autre primitive  $G$  de  $f$ , on sait qu'il existe une constante  $k$  telle que  $G = F + k$ , donc

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

#### Exemples :

**E1** - Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^1 t^n dt = \left[ \frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

**E2** -  $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t} dt = \left[ \frac{1}{2} (\ln(t))^2 \right]_1^e = \frac{1}{2}$

**E3** -  $\int_0^{\pi/4} \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int_0^{\pi/4} \left( 1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \left[ x - \text{Arctan}(x) \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

#### Remarque :

Même si  $a < b$ , on peut définir également  $\int_b^a f(t)dt = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(t)dt$

## 16.2.2 Fonction de la borne supérieure

### Proposition 5

Soit  $I$  un intervalle et soit  $a \in I$ . Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ . Alors la fonction  $\varphi$  :

$$\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , c'est exactement **la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$** . De plus

$$\forall x \in I, \varphi'(x) = f(x)$$

### Démonstration :

La fonction  $f$  est une fonction continue sur  $I$ , donc elle admet au moins une primitive  $F$  sur  $I$  (qui est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ). On a alors :

$$\forall x \in I, \varphi(x) = \int_a^x f(t)dt = \left[ F(t) \right]_a^x = F(x) - F(a)$$

Ainsi,  $\varphi$  apparaît directement comme une somme de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  (somme de  $x \mapsto F(x)$ , et de  $x \mapsto -F(a)$  fonction constante). Donc  $\varphi$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et on a :  $\forall x \in I, \varphi'(x) = F'(x) = f(x)$ .

### Exemples :

**E1** – La fonction **logarithme népérien** est par définition l'unique primitive de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur  $]0, +\infty[$  qui s'annule en 1. On a donc :

$$\forall x > 0, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

**E2** – La fonction **Arctangente** est la primitive de  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en 0. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$

### Proposition 6

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$ .

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions définies sur un intervalle  $J$  et à valeurs dans  $I$ . Alors le segment d'extrémités  $u(x)$  et  $v(x)$  est inclus dans  $I$ . On note :

$$\forall x \in J, g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

- Si  $u$  et  $v$  sont continues sur  $J$ , alors  $g$  est continue sur  $J$
- Si  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $J$ , alors  $g$  est dérivable sur  $J$  et

$$\forall x \in J, g'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

**Démonstration :**

La fonction  $f$  est une fonction continue sur  $I$ , donc elle admet au moins une primitive  $F$  sur  $I$  (qui est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ). On a alors :

$$\forall x \in J, g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = \left[ F(t) \right]_{u(x)}^{v(x)} = F(v(x)) - F(u(x))$$

Donc par composition, on en déduit directement, selon les propriétés de  $u$  et  $v$ , les propriétés de la fonction  $g$ . En particulier, si  $u$  et  $v$  sont dérivables,  $g$  l'est également et

$$\forall x \in J, g'(x) = (F \circ v)'(x) - (F \circ u)'(x) = v'(x)F'(v(x)) - u'(x)F'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

**Exemple :**

Soit  $F$  la fonction définie par  $F(x) = \int_{x^2}^{\ln(x)} \sin(e^t)dt$ . La fonction  $F$  est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$  ?

La fonction  $g : t \mapsto \sin(e^t)$  est continue (par composition) sur  $\mathbb{R}$ , donc admet une primitive  $G$  sur  $\mathbb{R}$ . On a alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^{+*}$  :

$$F(x) = \int_{x^2}^{\ln(x)} \sin(e^t)dt = \left[ G(t) \right]_{x^2}^{\ln(x)} = G(\ln(x)) - G(x^2)$$

$F$  est donc une somme de composées de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et de plus :

$$\forall x > 0, F'(x) = \frac{1}{x}G'(\ln(x)) - 2xG'(x^2) = \frac{1}{x}g(\ln(x)) - 2xg(x^2) = \frac{1}{x}\sin(x) - 2x\sin(e^{x^2})$$

**16.2.3 Propriétés de somme****Proposition 7***Linéarité de l'intégrale*

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur l'intervalle  $[a, b]$ . Alors pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$$

**Proposition 8***Relation de Chasles*

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Alors pour tous  $a, b, c \in I$ , on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

**Remarque :**

On a ainsi :

$$\int_a^b f(t)dt = - \int_b^a f(t)dt$$

**Définition 9**

On dit qu'une fonction  $f$  définie sur  $[a, b]$  est **continue par morceaux sur  $[a, b]$**  si  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$  sauf peut-être en un nombre fini de points  $a_1, \dots, a_p$ , en lesquels la fonction admet des limites finies à gauche et à droite.

**Proposition 10**

On ne modifie pas la valeur d'une intégrale en modifiant les valeurs de  $f$  sur un nombre fini de points. Une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  est donc intégrable sur  $[a, b]$ . Si  $a_0 = a, a_1, \dots, a_p = b$  désignent les points de discontinuité de  $f$ . On a :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t)dt$$

où  $f_k$  est le prolongement continu de  $f|_{]a_k, a_{k+1}[}$  à  $[a_k, a_{k+1}]$ .

**16.2.4 Intégration par parties****Théorème 11***Intégration par parties*

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un segment  $[a, b]$ , alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[ u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

**Démonstration :**

On sait que  $(uv)' = u'v + uv'$ , donc  $u'v = (uv)' - uv'$ . Ainsi :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \int_a^b (uv)'(t)dt - \int_a^b u(t)v'(t)dt = \left[ u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

**Exemples :**

**E1** – Calculons  $\int_0^2 te^{-t}dt$ .

On pose :

$$\left| \begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{array} \right.$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 2]$ , donc on peut intégrer par parties :

$$\int_0^2 te^{-t}dt = \left[ t(-e^{-t}) \right]_0^2 - \int_0^2 1(-e^{-t})dt = -2e^{-2} + \int_0^2 e^{-t}dt = -2e^{-2} + \left[ -e^{-t} \right]_0^2 = -2e^{-2} - e^{-2} + 1 = 1 - 3e^{-2}$$

**E2** – Calculons  $\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t^2}dt$ .

On pose :

$$\left| \begin{array}{l} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{l} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = -\frac{1}{t} \end{array} \right.$$

Les fonctions  $u$  et  $v$  sont bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[1, 2]$ , donc on peut intégrer par parties :

$$\int_1^2 \frac{\ln(t)}{t^2}dt = \left[ -\frac{\ln(t)}{t} \right]_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\frac{\ln(2)}{2} - \left[ \frac{1}{t} \right]_1^2 = -\frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

## 16.2.5 Changements de variables

### Théorème 12

Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  et soit  $\varphi$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  et à valeurs dans  $I$ . Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

### Démonstration :

Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . Alors la fonction  $t \mapsto F(\varphi(t))$  est une primitive de la fonction  $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ .

$$\text{On a donc : } \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left[ F(\varphi(t)) \right]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \left[ F(u) \right]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$$

### Remarques :

**R1** – Un changement de variable peut se faire "dans les deux sens".

**R2** – Si on part d'une intégrale  $\int_a^b g(x)dx$  et qu'on demande un changement de variable  $u = \varphi(x)$ , on essaie d'écrire " $g(x)dx$ " sous la forme " $f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ " où  $f(\varphi(x))$  est une expression où n'apparaissent que des  $\varphi(x)$  (et non des " $x$ " seuls).

**R3** – Si on part d'une intégrale  $\int_a^b g(x)dx$  et qu'on nous demande un changement de variable  $x = \varphi(t)$ , il s'agit d'abord de remplacer les bornes de l'intégrale par des " $\varphi(a)$ " et des " $\varphi(b)$ ", puis on remplace les  $x$  par  $\varphi(t)$  et le " $dx$ " par " $\varphi'(t)dt$ ".

### Exemples :

**E1** – Calculer l'intégrale  $I = \int_0^{\pi/2} \cos^3(x) \sin^2(x)dx$  à l'aide d'un changement de variable  $u = \sin(x)$ .

On pose  $\forall x \in [0, \pi/2], \varphi(x) = \sin(x)$ .

La fonction  $\varphi$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi/2]$  et on a :  $\forall x \in [0, \pi/2], \varphi'(x) = \cos(x)$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \cos^3(x) \sin^2(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin^2(x) (\cos(x)dx) \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin^2(x) (\varphi'(x)dx) \\ &\quad \text{(1ère étape : on fait apparaître le } \varphi'(x)dx) \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x)) \sin^2(x) (\varphi'(x)dx) \\ &= \int_0^{\pi/2} (1 - (\varphi(x))^2)(\varphi(x))^2 (\varphi'(x)dx) \\ &\quad \text{(2ème étape : on ne fait apparaître que des } \varphi(x) \text{ avant le } (\varphi'(x)dx)) \\ &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi/2)} (1 - u^2)u^2 du \\ &= \left[ \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$



**E2** – Calculer l'intégrale  $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  à l'aide d'un changement de variable  $x = \sin(t)$ .

On remarque que  $0 = \sin(0)$  et  $1 = \sin(\pi/2)$ , on a donc  $I = \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)} \sqrt{1-x^2} dx$ .

On pose  $\forall t \in [0, \pi/2]$ ,  $\varphi(t) = \sin(t)$ .

La fonction  $\varphi$  est bien de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, \pi/2]$  et on a :  $\forall t \in [0, \pi/2]$ ,  $\varphi'(t) = \cos(t)$ .

On a donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi/2)} \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-(\sin(t))^2} (\varphi'(t) dt) \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\cos(t))^2} (\cos(t)) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{2} \right) dt \\ &= \left[ \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{1}{2} t \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

**E3** – Les changements de variables "simples" sont les changements affines, i.e.  $t = au + b$ .

Dans ce cas, on a " $dt = adu$ " et il suffit de changer les bornes selon les valeurs que prennent  $t$  et  $u$ .

$$\int_2^5 \exp(3t+1) dt = \int_{3 \times 2 + 1}^{3 \times 5 + 1} \exp(u) \times 3 du \quad (\text{avec le c.v. } u = 3t + 1)$$

**E4** – Un cas particulier est le changement  $u = -t$ . Il suffit pour cela de changer le signe des bornes, de remplacer les  $t$  par  $-u$  (ou les  $-t$  par  $u$ ) et de changer également le  $du$  en  $-dt$  :

$$\int_{-1}^5 \exp(t^2 + t + 1) dt = \int_1^{-5} \exp(u^2 - u + 1) (-du) = \int_{-5}^1 \exp(u^2 - u + 1) du$$

### Remarque :

On n'est pas obligé de "justifier" les changements de variables affines (du type  $u = -t$  ou du type  $u = at + b$ ). Pour tous les autres, on doit écrire les hypothèses (fonction  $\varphi$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un segment, ...).

### Proposition 13

Soit  $a \geq 0$  et soit  $f$  une fonction continue sur  $[-a, a]$ .

- Si  $f$  est une fonction paire, alors :  $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt = 2 \int_{-a}^0 f(t) dt$ .
- Si  $f$  est une fonction impaire, alors :  $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$  et  $\int_0^a f(t) dt = - \int_{-a}^0 f(t) dt$ .

### Proposition 14

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  qui est  $T$ -périodique. Alors :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \int_{a+T}^{b+T} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

### 16.2.6 Intégrales et inégalités

#### Proposition 15

#### Positivité de l'intégrale

Soit  $f$  une fonction continue (par morceaux) sur  $[a, b]$  avec  $a < b$ .

$$\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(t) dt \geq 0$$

#### Remarques :

**R1** – L'intégrale d'une fonction positive est un nombre positif si les bornes sont bien dans le bon sens.

**R2** – De même, si les bornes sont dans le bons sens, l'intégrale d'une fonction négative est un nombre négatif. La propriété s'appelle quand même la "positivité" de l'intégrale.

#### Proposition 16

#### Fonction positive et continue

• Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  avec  $a < b$ .

Si  $f \geq 0$  et si  $f$  n'est pas la fonction nulle, alors  $\int_a^b f(t) dt > 0$ .

• Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  avec  $a < b$ .

Si  $f \geq 0$  et si  $\int_a^b f(t) dt = 0$ , alors  $f$  est la fonction nulle sur  $[a, b]$ .

#### Proposition 17

#### Positivité/Croissance de l'intégrale

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues (par morceaux) sur un intervalle  $[a, b]$  avec  $a < b$ .

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

#### Proposition 18

#### Inégalité de la moyenne

Soit  $f$  une fonction continue (par morceaux) sur  $[a, b]$ .

On suppose qu'il existe deux réels  $m$  et  $M$  vérifiant :  $\forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$ . Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

#### Exemple :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}$ .

En effet, pour tout  $t \in [n, n+1]$ , on a :  $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$ , d'où, par positivité de l'intégrale :

$$\frac{1}{n+1} \int_n^{n+1} 1 dt \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n} \int_n^{n+1} 1 dt \implies \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}$$

#### Proposition 19

#### Intégrale et valeur absolue

Soit  $f$  une fonction continue (par morceaux) sur  $[a, b]$  avec  $a < b$ . Alors :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$