CHAPITRE 15

Suites et séries

15.1 Convergence des suites réelles

15.1.1 Rappels

Définition 1

Une suite (u_n) est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$.
Une suite (u_n) est **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$.
Une suite (u_n) est **strictement croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.
Une suite (u_n) est **strictement décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.

Remarques :

R 1 – Pour étudier la monotonie, on regarde si "$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leqslant 0$" ou si "$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geqslant 0$"

R 2 – Si on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, alors on peut aussi utiliser les critères suivants :

$$(u_n) \text{ croissante } \iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

$$(u_n) \text{ décroissante } \iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$

Définition 2

Une suite (u_n) est **majorée** si : $\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$.
Le réel M est alors appelé un **majorant** de la suite (u_n).

Une suite (u_n) est **minorée** si : $\exists m \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$.
Le réel m est alors appelé un **minorant** de la suite (u_n).

15.1.2 Comportement asymptotique d'une suite

15.1.3 Suites convergentes

Définition 3

Une suite (u_n) **converge** vers une limite réelle finie ℓ si u_n peut être aussi proche que l'on veut de ℓ, du moment que n est pris suffisamment grand, c'est-à-dire supérieur à un certain rang. Autrement dit :

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Remarques :

- **R 1** – Avec la définition ci-dessus, l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ contient donc tous les termes de la suite (u_n), sauf un nombre fini d'entre eux (jusqu'au rang N)]
- **R 2** – **Etudier la nature d'une suite** (u_n), c'est déterminer si cette suite est convergente ou non.
- **R 3** – Si une suite (u_n) admet une limite, alors cette limite est unique.

Définition 4

Une suite est dite **divergente** si elle n'est pas convergente.

Divergence vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \iff \forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant N,\ u_n \geqslant A$$

Divergence vers $-\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \iff \forall B < 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ /\ \forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant B$$

Remarques :

- **R 1** – Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors la suite (u_n) est divergente, mais admet une limite (infinie).
- **R 2** – Une suite divergente est une suite qui :
  - soit admet une limite infinie
  - soit n'admet pas de limite

15.1.4 Opérations sur les limites

Ce sont les mêmes règles que pour les fonctions, concernant les sommes, les produits, les inverses de suites (voir Chapitre 06 sur les Limites de Fonctions)
On a les mêmes formes indéterminées également :

$$\boxed{\infty - \infty} \quad \boxed{0 \times \infty} \quad \boxed{\frac{0}{0}} \quad \boxed{\frac{\infty}{\infty}} \quad \boxed{1^\infty} \quad \boxed{0^\infty} \quad \boxed{\infty^0}$$

15.1.5 Composition des limites

Théorème 5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit (u_n) une suite de réels à valeurs dans I à partir d'un certain rang.

Soient $a, x_0 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = x_0 \text{ et } \lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = a$$

Théorème 6 ***Utilisation de la continuité***

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si f est continue en ℓ, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

Proposition 7 ***Passage à la valeur absolue***

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$$

Remarque :

> Pour montrer qu'une suite (u_n) converge vers un réel ℓ, on peut donc aussi montrer que la suite $(u_n - \ell)$ converge vers 0.

Proposition 8

Soit (u_n) une suite convergente vers 0. Alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = 1} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{u_n}-1}{u_n} = 1} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+u_n)^\alpha - 1}{\alpha u_n} = 1} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(u_n)}{u_n} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\tan(u_n)}{u_n} = 1} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(u_n)-1}{\frac{u_n^2}{2}} = 1} \quad \forall \alpha > 0, \beta > 0 \ \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n^\alpha (\ln(u_n))^\beta = 0}$$

Soit (u_n) une suite divergente vers $+\infty$. Alors pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\alpha u_n}}{(u_n)^\beta} = +\infty} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(u_n))^\alpha}{(u_n)^\beta} = 0}$$

15.1.6 Inégalités, comparaison et encadrement

Théorème 9

Toute suite convergente est bornée.

Remarques :

- **R 1** – La réciproque est fausse
- **R 2** – Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et que $\ell > m$, alors on a $u_n > m$ à partir d'un certain rang.
- **R 3** – Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et que $\ell < M$, alors on a $u_n < M$ à partir d'un certain rang.
- **R 4** – Si (u_n) converge vers ℓ et que $m < \ell < M$, alors

$$\text{à partir d'un certain rang : } m < u_n < M$$

- **R 5** – Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$ avec $\ell < \ell'$, alors

$$\text{à partir d'un certain rang : } u_n < v_n$$

Proposition 10

Si (u_n) est une suite positive (ou strictement positive) à partir d'un certain rang, et si (u_n) converge vers un réel ℓ, alors $\ell \geqslant 0$.

Remarque :

Attention ! Si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on n'a pas forcément $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$. Une inégalité stricte devient toujours large après un passage à la limite.

Proposition 11 ***Passage à la limite dans une inégalité***

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes et si à partir d'un certain rang, on a toujours $u_n \leqslant v_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Théorème 12 ***Théorème de comparaison***

- *Si* $\begin{cases} \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases}$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- *Si* $\begin{cases} \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 13 ***Théorème d'encadrement***

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite finie ℓ, alors la suite (v_n) est convergente et converge vers cette même limite ℓ.

Conséquences 14 ***Théorème d'encadrement avec la valeur absolue***

Si à partir d'un certain rang, on a :

$$|u_n - \ell| \leqslant v_n \qquad \text{et} \lim_{n\to+\infty} v_n = 0,$$

alors la suite (u_n) est convergente et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Conséquences 15 ***Produit suite bornée / suite convergente vers 0***

Si (u_n) est une suite bornée et si (v_n) est une suite convergente vers 0, alors la suite (u_nv_n) converge vers 0.

Démonstration :

Supposons que la suite (u_n) soit bornée. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant k$.
Alors, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |u_nv_n| = |u_n| \times |v_n| \leqslant k|v_n|$$

et la suite $(k|v_n|)$ converge vers 0 par hypothèse.
Donc par le théorème d'encadrement, on a bien que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n) = 0$.

15.1.7 Suites extraites

Définition 16

Une suite (v_n) est appelée une **suite extraite de la suite (u_n)** si elle est obtenue par une extraction infinie des termes de la suite (u_n).
Par exemple, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de la suite (u_n).

- La suite (u_{2n}) est la **suite extraite d'indices pairs** :

$$(u_{2n}) = (u_0, u_2, u_4, u_6, \ldots)$$

- La suite (u_{2n+1}) est la **suite extraite d'indices impairs** :

$$(u_{2n+1}) = (u_1, u_3, u_5, u_7, \ldots)$$

Théorème 17

Si une suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ, alors toutes suite extraite de la suite (u_n) converge vers ℓ.

Théorème 18 ***CNS de convergence***

Une suite (u_n) converge une limite finie ℓ si et seulement si la suite d'indices pairs (u_{2n}) et la suite d'indices impairs (u_{2n+1}) convergent toutes les deux vers cette même limite.

Remarque :

Si deux suites extraites d'une même suite (u_n) n'ont pas la même limite, alors la suite (u_n) n'est pas convergente.

15.1.8 Le cas des suites monotones

Théorème 19 ***Théorème de la Limite Monotone***

- *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
- *Toute suite décroissante et minorée est convergente.*
- *Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.*
- *Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.*

Remarque :

Si une suite (u_n) est croissante et majorée, alors la limite de la suite (u_n) est le plus petit des majorants de la suite (u_n) : c'est sa borne supérieure : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\limits_{n\to+\infty} u_n$. Si une suite (u_n) est décroissante et minorée, alors la limite de la suite (u_n) est le plus grand des minorants de la suite (u_n) : c'est sa borne inférieure : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\limits_{n\to+\infty} u_n$.

15.1.9 Suites adjacentes

Définition 20

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si, à partir d'un certain rang :

- l'une est croissante
- l'autre est décroissante
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

Théorème 21

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes, et elles ont la même limite.

Démonstration :

Supposons par exemple (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
Remarquons pour commencer que la suite $(u_n - v_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante puisque

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n) = (u_{n+1} - u_n) - (v_{n+1} - v_n) \geqslant 0$$

Puisque $(u_n - v_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante, ayant pour limite 0, cela implique que cette suite est à termes négatifs, puisque 0 doit être un majorant de la suite $(u_n - v_n)$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$$

Autrement dit, la suite (u_n) est croissante et majorée (par v_0), donc converge vers un réel ℓ. De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée (par u_0) donc converge également, vers un réel ℓ'.
On a de plus :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \begin{cases} 0 \text{ (par hypothèse)} \\ \ell - \ell' \end{cases}$$

Par unicité de la limite, on en déduit donc que $\ell = \ell'$ et donc (u_n) et (v_n) ont bien la même limite.

Théorème 22 ***Réels/Rationnels***

Tout réel est la limite d'une suite de rationnels.

15.2 Comparaisons des suites numériques

15.2.1 Suites équivalentes

Définition 23

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites équivalentes s'il existe une suite (w_n) telle que à partir d'un certain rang n_0 :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n = v_n w_n \qquad \text{avec } w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Remarque :

Autrement dit, si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, on a :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1}$$

Exemples :

E 1 – On connaît déjà des équivalents usuels, grâce aux limites usuelles :
Si (u_n) est une suite qui <u>converge vers 0</u>, on a :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad e^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad (1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$$

E 2 – Une suite polynômiale est toujours équivalente à son terme de plus haut degré

Proposition 24

Deux suites équivalentes ont la même limite, quand elles ont une limite

15.2.2 Suites négligeables

Définition 25

Une suite (u_n) est dite **négligeable devant une suite** (v_n) s'il existe une suite (w_n) telle que à partir d'un certain rang n_0 :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n = v_n w_n \qquad \text{avec } w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ (et on lit "(u_n) est un petit o de (v_n)")

Remarques :

R 1 – Autrement dit, si (u_n) et (v_n) sont deux suites qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang, on a :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}$$

R 2 – On a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$$

et

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Proposition 26 ***Croissances comparées des suites usuelles***

En notant $u_n \underset{n\to+\infty}{<<} v_n$ pour $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, on a : pour tous $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$,

$$n! \underset{n\to+\infty}{>>} e^{\alpha n} \underset{n\to+\infty}{>>} n^\beta \underset{n\to+\infty}{>>} (\ln(n))^\gamma$$

Remarque :

Si $0 < \alpha < \beta$, on a $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(n^\beta)$

Exemple :

On a par exemple $2^n - 12n^2 - 3\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n - 12n^2 - 3\ln(n)) = +\infty$.
En gros, déterminer un équivalent consiste à ne garder que le terme prépondérant et à supprimer tous les termes négligeables devant lui.

Proposition 27

Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
Si (v_n) est convergente, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Si $(|u_n|)$ diverge vers $+\infty$, alors $(|v_n|)$ aussi.

Remarques :

R 1 – La relation d'équivalence "$\sim$" est :
- **symétrique** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
- **transitive** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.
- **stable par produit** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u'_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v'_n$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u'_n v'_n$.
- **stable par inverse** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si (v_n) ne s'annule plus à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
- **stable par passage à la valeur absolue** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$

ATTENTION, on n'additionne pas les équivalents, comme pour les fonctions.
On ne peut pas non plus composer les équivalents, par exemple par l'exponentielle.

R 2 – La relation de négligeabilité "o" est :
-
- **transitive** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
- **stable par produit** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u'_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v'_n)$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u'_n v'_n)$.
- **stable par inverse** : si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et si (u_n) et (v_n) ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

Exemple :

Une limite à savoir refaire <u>parfaitement</u> : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x}$.
On a : $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)\right)$. Or, on sait que $n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\dfrac{x}{n} = x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, donc par composition de limites (et surtout pas d'équivalents), $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^x$

15.3 Généralités sur les séries

15.3.1 Définitions

Définition 28

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la **somme partielle d'indice n** associée à la suite (u_n) : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On appelle alors **série de terme général u_n**, et on note $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de ces sommes partielles.

Définition 29

- On dit que **la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge** si la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

  La limite de cette suite est alors appelée la **somme de la série**, qu'on note : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$.
- Si la série ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

Définition 30

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, on appelle pour tout $n \in \mathbb{N}$, le **reste d'indice n** R_n :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Remarques :

R 1 – Déterminer la nature d'une série signifie qu'il faut déterminer si la série est convergente ou divergente.

R 2 – Si la série est convergente, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n + R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

R 3 – Si la série est convergente, on a

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$$

puisque $\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

R 4 – Il ne faut pas confondre les différents éléments de l'étude d'une série :
- u_n : la suite de base, le "terme général" de la série
- S_n : la somme partielle des u_k : c'est $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$
- $\sum_{n\geqslant 0} u_n$: c'est la série, c'est la suite (S_n)
- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: c'est la somme de la série, la limite de (S_n) si elle existe.

R 5 – Puisque $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ et $S_{n-1} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$, on a

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = S_n - S_{n-1}$$

Exemple :

Soit q un réel quelconque. Soit (u_n) la suite géométrique définie par

$$u_n = q^n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle de la suite (u_n) est égale à

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Regardons si la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge, i.e. si la suite des sommes partielles (S_n) admet une limite.

- Si $q = 1$, on a
$$S_n = n+1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
donc dans ce cas là, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ diverge dans le cas où $q = 1$.
- Si $q = -1$, on a
$$S_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} ?$$
donc dans ce cas là, (S_n) n'admet pas de limite, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ diverge dans le cas où $q = -1$
- Si $q > 1$, on a
$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
puisque $-q^{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $1 - q < 0$, donc dans ce cas là, (S_n) diverge, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ diverge dans le cas où $q > 1$.
- Si $q < -1$, on a
$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} ?$$
donc dans ce cas là, (S_n) n'admet pas de limite, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ diverge dans le cas où $q < -1$
- Si $-1 < q < 1$, on a
$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}$$
puisque $q^{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc dans ce cas là, (S_n) converge et admet pour limite $\frac{1}{1-q}$, la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge dans le cas où $-1 < q < 1$ et dans ce cas là
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$$
Cette série s'appelle la **série géométrique de paramètre q**.

15.3.2 Condition nécessaire de convergence

Proposition 31 ***Condition nécessaire (mais pas suffisante) de convergence***

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge nécessairement vers 0.

Démonstration :

On a dit précedemment que $\forall n \geqslant 1,\ u_n = S_n - S_{n-1}$.
Si la série converge, cela veut dire que la suite (S_n) converge. Notons par exemple ℓ la limite de la suite (S_n). On a alors :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell, \qquad S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \qquad \text{et donc} \qquad u_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$$

Remarques :

R 1 – On utilise souvent cette propriété dans le sens inverse :
SI (u_n) ne converge pas vers 0, ALORS la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

R 2 – La réciproque de cette propriété est FAUSSE.
Si la suite (u_n) converge vers 0, on ne peut pas affirmer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Exemple :

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge (exemple de la **série harmonique**)

Notons pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Il s'agit de montrer que la suite (S_n) diverge.

1ère étape : montrons que : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}}$.
En effet si on fixe $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction ln est continue sur le segment $[k, k+1]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]k, k+1[$.
De plus, pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $\ln'(t) = \frac{1}{t}$, donc : $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln'(t) \leqslant \frac{1}{k}$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, on en déduit donc que :

$$\frac{1}{k+1}((k+1) - k) \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}((k+1) - k)$$

autrement dit :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

2ème étape : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On somme l'inégalité de droite précédente pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

En reconnaissant une somme télescopique à gauche, on a donc : $\ln(n+1) \leqslant S_n$.
D'où, puisque $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on en déduit par comparaison que (S_n) diverge vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n} \text{ est donc divergente}}$$

15.3.3 Opérations sur les séries convergentes

Proposition 32

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *deux séries.*

1. *Pour tout réel* λ *non nul, les séries* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ *sont de même nature. De plus, si les séries convergent, on a :*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$
2. *Si les deux séries* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *sont convergentes,* <u>*alors*</u> *la série* $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ *est convergente également et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Remarque :

La réciproque de la deuxième propriété est fausse !
On peut avoir $\sum_{n\geqslant 0}(u_n+v_n)$ qui converge, sans que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ni $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ ne convergent.

15.4 Critères de convergence pour les séries à termes positifs

Dans toute cette partie, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est à termes positifs, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.

15.4.1 Sommes partielles

Proposition 33

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes positifs. Alors la suite des sommes partielles* (S_n) *est une suite croissante.*

Démonstration :

En effet, si on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0,$$
donc la suite (S_n) est bien croissante.

Théorème 34

Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite (S_n) *des sommes partielles est majorée.*
Si la série diverge, alors la suite (S_n) *diverge nécessairement vers* $+\infty$.

15.4.2 Théorèmes de comparaison

Théorème 35 ***Théorème de comparaison***

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries telles qu'à partir d'un certain rang, on ait*

$$0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

Alors :

- *Si* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *converge, alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
- *Si* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge, alors* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge.*

Théorème 36 ***Théorème de négligeabilité***

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes positifs, telles qu'on ait*

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$$

Alors :

- *Si* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *converge, alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
- *Si* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge, alors* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *diverge.*

Théorème 37 ***Théorème d'équivalence***

Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes positifs, telles qu'on ait*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Alors les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *sont de même nature.*

15.4.3 Séries alternées : convergence absolue

Dans ce paragraphe, on n'impose plus à ce que la suite (u_n) soit positive.

Définition 38

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série. On dit que la série **converge absolument** si la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ est convergente.

Théorème 39

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes quelconques.*

Si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *est absolument convergente, ALORS, elle est aussi convergente.*

Démonstration :

Remarques :

R 1 – Si on regarde les sommes partielles : on sait d'après l'inégalité triangulaire que :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

Alors, si le terme de droite converge lorsque $n \to +\infty$ (i.e. la série converge absolument), alors le terme de gauche sera majoré, donc la série ne va pas diverger.

R 2 – Si une série $\sum u_n$ n'est pas de signe constant, alors on regarde $\sum |u_n|$ qui elle, est une série à termes positifs : on peut appliquer les critères de comparaison.
Si cette série $\sum |u_n|$ converge, alors on peut dire que $\sum u_n$ converge.
Si cette série $\sum |u_n|$ diverge, alors on ne peut a priori rien dire sur $\sum u_n$

Exemple :

Regardons la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

- ⋆ La série n'est pas à termes de signes constants, donc on ne peut pas appliquer les critères.
- ⋆ Regardons la valeur absolue : on examine $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$: c'est la série harmonique qui diverge : la série n'est pas absolument convergente.
- ⋆ On revient alors à la définition ! On étudie les sommes partielles. On note pour tout $N \geqslant 1$:

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$$

Alors :

$$\forall N \geqslant 1, \quad S_{2N+2} - S_{2N} = \frac{(-1)^{2N+2}}{2N+2} + \frac{(-1)^{2N+1}}{2N+1} = \frac{1}{2N+2} - \frac{1}{2N+1} < 0$$

La suite $(S_{2N})_{N\geqslant 1}$ est décroissante.

$$\forall N \geqslant 1, \quad S_{2N+3} - S_{2N+1} = \frac{(-1)^{2N+3}}{2N+3} + \frac{(-1)^{2N+2}}{2N+2} = -\frac{1}{2N+3} + \frac{1}{2N+2} > 0$$

La suite $(S_{2N+1})_{N\geqslant 1}$ est croissante.

$$S_{2N+1} - S_{2N} = \frac{(-1)^{2N+1}}{2N+1} = \frac{-1}{2N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Les suites $(S_{2N})_{N\geqslant 1}$ et $(S_{2N+1})_{N\geqslant 1}$ sont donc adjacentes : elles convergent vers une même limite.
Enfin, puisque les deux suites extraites d'indices pairs/impairs convergent toutes deux vers une même limite, la suite $(S_N)_{N\geqslant 1}$ converge également. Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge}}$$

C'est un exemple de série convergente, qui n'est pas absolument convergente.

15.5 Séries usuelles et sommes à connaître

15.5.1 Séries géométriques et dérivées

Théorème 40

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- *La série $\sum_{n \geqslant 0} q^n$ s'appelle la **série géométrique de raison** q.*

  Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$ et : $\forall q \in]-1,1[$, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}$.

- *La série $\sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ s'appelle la **série géométrique dérivée première de raison** q.*

  Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$ et : $\forall q \in]-1,1[$, $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}}$.

- *La série $\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ s'appelle la **série géométrique dérivée seconde de raison** q.*

  Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$ et : $\forall q \in]-1,1[$, $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}}$

Démonstration :

Le cas de la série géométrique a déjà été étudié.

Fixons $N \geqslant 1$. Etudions $\forall q \in]-1,1[$, $f(q) = \sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$.

La fonction q est dérivable sur $]-1,1[$ (quotient de fonct. dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas) et on a :

$$\forall q \in]-1,1[,\ f'(q) = \sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} = \frac{-(N+1)q^N(1-q) - (1-q^{N+1})(-1)}{(1-q)^2} = \frac{1-q^{N+1}-(N+1)q^N(1-q)}{(1-q)^2}$$

Or, $\forall q \in]-1,1[$, $\lim_{N \to +\infty} q^N = \lim_{N \to +\infty} Nq^N = 0$ (croissances comparées), donc : $\lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} kq^{k-1} \right) = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Ainsi, la série $\sum_{n \geqslant 1} nq^{n-1}$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{(1-q)^2}$.

De même, pour la série géoémtrique dérivée seconde.

15.5.2 Séries exponentielles

Théorème 41

Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$.

Démonstration :

L'an prochain ! Pour l'instant, on admet le résultat.

15.5.3 Séries de Riemann

Théorème 42 ***Séries de Riemann***

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque. Alors la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée la ***série de Riemann d'ordre*** *α.*

Alors

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1}$$

En particulier, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$ appelée la ***série harmonique****, diverge.*

En particulier, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Démonstration :

Il suffit de refaire le même raisonnement que pour la série harmonique en appliquant l'IAF. On obtient alors soit une minoration soit une majoration des sommes partielles.

Remarque :

Les séries de Riemann sont pratiques pour utiliser les critères de comparaison.
Cependant, on ne sait pas calculer leur somme.

15.5.4 Séries télescopiques

Remarque :

Lorsqu'une série peut s'écrire sous la forme : $\sum_{n \geqslant 0} (w_{n+1} - w_n)$ pour une certaine suite (w_n) donnée, on étudie alors les sommes partielles, qu'on peut calculer facilement par télescopage.

Exemple :

Montrons que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et déterminons sa somme

Déjà, on a $\frac{1}{n(n+1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge, donc par critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est bien convergente également.

Pour calculer sa somme, on calcule les sommes partielles :

$$\forall N \geqslant 1, \ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

(on reconnaît une somme télescopique). D'où $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1}$$