CHAPITRE 14

Applications linéaires

Dans tout le chapitre, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

14.1 Définitions

Définition 1

Une application f de E dans F est appelée une **application linéaire** si :

$$\boxed{\forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f\big(\lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\big) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})}$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemples :

E 1 – La fonction réelle $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$ est-elle linéaire ?

On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda x + y) = a(\lambda x + y) = \lambda ax + ay = \lambda f(x) + f(y)$$

La fonction f est donc linéaire.

E 2 – La fonction réelle $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ est-elle linéaire ?

On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda x + y) = (\lambda x + y)^2 = \lambda^2 x^2 + y^2 + 2xy, \qquad \lambda f(x) + f(y) = \lambda x^2 + y^2$$

La fonction f n'est donc pas linéaire.

Remarque :

Les fonctions linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont uniquement les fonctions dont la courbe représentative est une droite passant par 0.

Exemples :

E 1 – Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y; x + y + z) \end{array}$. L'application f est-elle linéaire ?
Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, soit $\overrightarrow{v} = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) &= f\big(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')\big) \\ &= f\big(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z'\big) \\ &= \big(2(\lambda x + x') - (\lambda y + y'); (\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z')\big) \\ &= \big(\lambda(2x - y) + (2x' - y'); \lambda(x + y + z) + (x', y', z')\big) \\ &= \lambda\big(2x - y; x + y + z\big) + \big(2x' - y', x' + y' + z'\big) \\ &= \lambda f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) \end{aligned}$$

E 2 – L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{0_E} \end{array}$, appelée **application nulle de F** (qui envoie tout vecteur de E sur le vecteur nul) est une application linéaire.

E 3 – L'application $Id_E \ : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{u} \end{array}$, appelée l'**application identité de E**, est une application linéaire.

Définition 2

- Une application linéaire qui va de E dans E est appelée un **endomorphisme de E**.
  On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E (au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$).
- Une application linéaire qui va de E dans F, qui en plus est bijective, est appelé un **isomorphisme**
- Une application de E dans E qui est à la fois un endomorphisme et un isomorphisme (i.e. linéaire de E dans E et bijective) est appelée un **automorphisme de E**

Remarque :

Les applications linéaires ne sont pas forcément des fonctions, pour montrer le caractère bijectif, on ne peut pas regarder de "continuité + stricte monotonie" cela n'a pas de sens. On revient à la définition : injective et surjective.

Proposition 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

1. *On a toujours $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$.*
2. *On a $f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})$, $f(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{v})$*
3. *On a $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{u_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\overrightarrow{u_k})$*

Démonstration :

Par exemple, $f(\overrightarrow{0_E}) = f(-\overrightarrow{x} + x) = -f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0_F}$.

14.2 Noyau et image

14.2.1 Noyau d'une application linéaire

Définition 4

Soit f une application linéaire de E dans F.
On appelle **noyau de** f, notée $\mathrm{Ker}(f)$, l'ensemble des antécédants de $\overrightarrow{0_F}$ dans E par f :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{u} \in E \ / \ f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0_F}\}}$$

Remarques :

- **R 1** – $\mathrm{Ker}(f)$ est toujours inclus dans l'ensemble de départ de f
- **R 2** – On a donc, pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(f)$, $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0_F}$.

Proposition 5

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors Ker(f) est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration :

- $\mathrm{Ker}(f) \subset E$ par définition.
- On sait déjà que $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$, donc $\overrightarrow{0_E} \in \mathrm{Ker}(f)$: $\mathrm{Ker}(f) \neq \emptyset$
- Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. A-t-on encore $\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(f)$?

$$f\big(\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\big) = \lambda f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{0_F} + \overrightarrow{0_F} = \overrightarrow{0_F}$$

donc $\mathrm{Ker}(f)$ est bien stable par combinaison linéaire.

Proposition 6

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :

$$f \text{ injective} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$$

Démonstration :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f injective : $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x'} \in E$, si on a $f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x'})$, alors on a nécessairement $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x'}$.
Montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
L'inclusion $\{\overrightarrow{0_E}\} \subset \mathrm{Ker}(f)$ est toujours vraie (puisque $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E)
A-t-on $\mathrm{Ker}(f) \subset \{\overrightarrow{0_E}\}$?
Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(f)$, autrement dit $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0_F} = f(\overrightarrow{0_E})$, donc puisque f est injective, on a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0_E}$, donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \{\overrightarrow{0_E}\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
Montrons que f est injective.
Soient $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{x'}$ deux vecteurs de E tels que $f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x'})$. On a alors

$$f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x'}) = \overrightarrow{0_F} \Longrightarrow f(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'}) = \overrightarrow{0_F} \Longrightarrow \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'} \in \mathrm{Ker}(f) \Longrightarrow \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x'} = \overrightarrow{0_E} \Longrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x'}$$

14.2.2 Image d'une application linéaire

Définition 7

Soit f une application linéaire de E dans F.
On appelle **Image de f**, notée $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble des images de tous les vecteurs de E dans l'ensemble F :

$$\mathrm{Im}(f) = \{\overrightarrow{y} \in F \ / \ \exists \overrightarrow{x} \in E \ / \ \overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})\}$$

Remarques :

R 1 – On a donc $\mathrm{Im}(f) = f(E)$: c'est l'image directe de E par l'application f

R 2 – Pour tout vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(f)$, on peut dire que : $\exists \overrightarrow{u} \in E \ / \ \overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{u})$

R 3 – $\mathrm{Im}(f)$ est donc finalement l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire "f(quelque chose)".

Proposition 8

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors Im(f) est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration :

- $\mathrm{Im}(f) \subset F$ par définition.
- On sait déjà que $f(\overrightarrow{0_E}) = \overrightarrow{0_F}$, donc $\overrightarrow{0_F}$ est l'image d'un vecteur de E par l'application f, donc $\overrightarrow{0_F} \in \mathrm{Im}(f)$: $\mathrm{Im}(f) \neq \emptyset$
- Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(f)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. A-t-on encore $\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(f)$?
  On sait que $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(f)$: $\exists \overrightarrow{x} \in E \ / \ \overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{x})$.
  On sait que $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(f)$: $\exists \overrightarrow{y} \in E \ / \ \overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{y})$.
  Alors
  $$\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \lambda f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y}) = f\big(\lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\big) \in \mathrm{Im}(f)$$
  donc $\mathrm{Im}(f)$ est bien stable par combinaison linéaire.

Proposition 9

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :

$$f \text{ surjective} \iff Im(f) = F$$

Proposition 10

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors :

$$si\ E = Vect\,(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})\,, \qquad alors\ Im(f) = Vect\,(f(\overrightarrow{u_1}), f(\overrightarrow{u_2}), \ldots, f(\overrightarrow{u_n}))$$

Démonstration :

Supposons que $E = Vect\,(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$.
Montrons que $\mathrm{Im}(f) = Vect\,(f(\overrightarrow{u_1}), f(\overrightarrow{u_2}), \ldots, f(\overrightarrow{u_n}))$.

L'inclusion $Vect\,(f(\overrightarrow{u_1}), f(\overrightarrow{u_2}), \ldots, f(\overrightarrow{u_n})) \subset \mathrm{Im}(f)$ est évidente, puisque chacun des $f(\overrightarrow{u_i})$ est dans $\mathrm{Im}(f)$, et que $\mathrm{Im}(f)$ est stable par combinaison linéaire, donc le Vect est bien encore inclus dans $\mathrm{Im}(f)$.

Réciproquement, si on prend $\overrightarrow{y} \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $\overrightarrow{x} \in E$ tel que $\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$.
Or, $E = Vect(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$, donc $\overrightarrow{x}$ peut s'écrire $\overrightarrow{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{u_k}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Ainsi :

$$\overrightarrow{y} = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{u_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\overrightarrow{u_k}) \in Vect\left(f(\overrightarrow{u_1}), \dots, f(\overrightarrow{u_n})\right)$$

On a donc bien montré que $\mathrm{Im}(f) \subset Vect\left(f(\overrightarrow{u_1}), f(\overrightarrow{u_2}), \dots, f(\overrightarrow{u_n})\right)$, d'où l'égalité entre les deux ensembles.

14.2.3 Théorème du rang

Définition 11

Soit f une application linéaire de E dans F. On appelle **rang de f** la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, lorsque cette dimension existe bien :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

Théorème 12 ***Théorème du rang***

Soit f une application linéaire de E dans F.
On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie. Alors, on a :

$$\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(E)$$

autrement dit :

$$\boxed{\dim(Ker(f)) + rg(f) = \dim(E)}$$

14.3 Isomorphismes en dimension finie

Proposition 13

Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
f \text{ injective} &\iff \mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\} \\
&\iff \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 \\
&\iff \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \\
&\iff \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E) \text{ (par théorème du rang)} \\
&\iff \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) \\
&\iff \mathrm{Im}(f) = F \text{ car } \mathrm{Im}(f) \subset F \text{ et égalité des dimensions} \\
&\iff f \text{ surjective}
\end{aligned}$$

Remarque :

On utilise souvent ce résultat pour les <u>endomorphismes en dimension finie</u> :
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\mathrm{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$, alors f est injective, et donc également surjective, et donc bijective et c'est un isomorphisme de E dans E.

Proposition 14

Soit $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ une famille libre de E.
Si f est une application linéaire <u>injective</u> de E dans F, alors $\left(f(\overrightarrow{u_1}), f(\overrightarrow{u_2}), \dots, f(\overrightarrow{u_n})\right)$ est une famille libre de F.

Démonstration :

Supposons que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ soit une famille libre de E.
Prenons $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application injective.
Montrons que $\left(f(\overrightarrow{u_1}), f(\overrightarrow{u_2}), \dots, f(\overrightarrow{u_n})\right)$ est une famille libre de F.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(\overrightarrow{u_k}) = \overrightarrow{0_F}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(\overrightarrow{u_k}) = \overrightarrow{0_F} &\Longrightarrow f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{u_k}\right) = \overrightarrow{0_F} \text{ (car } f \text{ linéaire)} \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{u_k} \in \mathrm{Ker}(f) \\
&\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{0_E} \text{ (car } f \text{ injective)} \\
&\Longrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], \lambda_k = 0 \text{ (car } (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}) \text{ libre)}
\end{aligned}$$

Proposition 15

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. *Si f est un isomorphisme de E dans F, alors l'image de toute base de E par f est une base de F.*
2. *Si l'image d'une base de E par f est une base de F, alors f est un isomorphisme de E dans F.*

Démonstration :

1. Supposons f est un isomorphisme de E dans F et prenons une base $\mathcal{B}$ de E.
   Puisque f est injective et que $\mathcal{B}$ est libre, on sait que $f(\mathcal{B})$ est une famille libre de F.
   De plus, $\mathcal{B}$ est génératrice de E, donc $f(\mathcal{B})$ est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, donc de F puisque f surjective.
   Ainsi, $f(\mathcal{B})$ est une base de F.
2. Supposons que $\mathcal{B}$ soit une base de E telle que $f(\mathcal{B})$ soit aussi une base de F.
   Puisque $Card(\mathcal{B}) = Card(f(\mathcal{B}))$, les espaces E et F sont de même dimension. De plus, puisque $f(\mathcal{B}) = \mathrm{Im}(f) = F$, on a f surjective, et donc f est également injective. Donc f est un isomorphisme.