CHAPITRE 11

Systèmes linéaires

11.1 Vocabulaire

Définition 1

Une **équation linéaire** à p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ est une équation du type

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b$$

avec $a_1, a_2, \dots, a_p, b$ des éléments de $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Un **système linéaire** de n équations linéaires à p inconnues est constitué de p équations du type précédent. On le note habituellement de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Autrement dit, on note a_{ij} le coefficient de l'inconnue x_j dans la i-ième équation.

Remarques :

- **R 1** – **Résoudre** un système de n équations à p inconnues revient à déterminer tous les p-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant simultanément les n équations du sysème.
- **R 2** – Quand on donne les solutions d'un système, il est très important de donner le n-uplet dans le "bon ordre".
  Par exemple, pour le système
  $$\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right.$$
  le couple $(2, 1)$ est solution, mais pas le couple $(1, 2)$. On a :
  $$\mathcal{S} = \{(2, 1)\}$$

Définition 2

Un système est **incompatible** s'il n'admet aucune solution.
Un système est appelé un **système de Cramer** s'il admet exactement une solution.

Exemples :

E 1 – Le système d'équations :

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$$

est un système incompatible.

E 2 – Le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$$

n'admet qu'une solution : le couple $(2,1)$. C'est donc un système de Cramer.

E 3 – Il existe des systèmes admettant une infinité de solutions. Par exemple :

$$\begin{cases} 2x-y=2 \\ -4x+2y=-4 \end{cases}$$

Les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes. On peut seulement exprimer y en fonction de x (ou le contraire) :

$$y=2x-1$$

et donc

$$\mathcal{S}=\{(x,2x-1),\ x\in\mathbb{K}\}$$

Définition 3

Un système linéaire est **triangulaire** s'il est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & \cdots & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & a_{nn}x_n & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

Remarque :

La formule du système triangulaire dépend en fait des valeurs de p et n, mais dans tous les cas un système triangulaire est un système facile à résoudre.

Exemples :

E 1 – Si $n=p$.

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 2x & - & y & + & 3z & = & -5 \\ & & 5y & + & z & = & 8 \\ & & & & -2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Il suffit de "remonter le système pour obtenir les valeurs des inconnues l'une après l'autre : $z=-2$, donc $5y=8-z=10$, d'où $y=2$, puis $2x=-5+y-3z=-6$, donc $x=-3$. On obtient une solution unique $\mathcal{S}=\{(-3,5,-2)\}$.
Lorsqu'on a un système triangulaire carré $(n=p)$, on aura la plupart du temps un système de Cramer.

E 2 – Si $n > p$.
C'est encore plus simple puisque les dernières équations ont un membre de gauche nul. Soit le membre de droite y est également nul et on peut oublier l'équation, soit ce n'est pas le cas et le système est incompatible, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 3z & = & -5 \\ & & 5y & + & z & = & 8 \\ & & & & -2z & = & 4 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right.$$

E 3 – Si $n < p$
Le système triangulaire aura nécessairement une infinité de solutions qu'on va pouvoir exprimer en fonction des dernières inconnues en remontant le système comme dans les autres cas :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & & y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

A l'aide de la deuxième équation, on obtient $y = 4 - 2z$, puis $x = -2 + 2y - z = 6 - 5z$, soit

$$\mathcal{S} = \{(6-5z, 4-2z, z),\ z \in \mathbb{K}\}$$

11.2 Résolution des systèmes

11.2.1 Opérations élémentaires sur les lignes

Définition 4
Deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

Définition 5
Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système linéaire sont de trois types :

- on peut échanger des lignes i et j :
$$L_i \longleftrightarrow L_j$$
- on peut multiplier une ligne par un réel non nul :
$$L_i \longleftarrow aL_i, \qquad (a \neq 0)$$
- on peut rajouter à une ligne autant de fois qu'on veut une autre ligne :
$$L_i \longleftarrow L_i + bL_j, \qquad (b \in \mathbb{K})$$

Remarque :

On combine souvent les deux derniers types d'opérations élémentaires pour faire des opérations du type $L_i \longleftarrow aL_i + bL_j$ avec $a \neq 0$

.

Proposition 6
Les opérations élémentaires sur les lignes transforment un système linéaire en un système équivalent

11.2.2 Pivot de Gauss

Proposition 7

On peut toujours transformer un système linéaire quelconque en un système triangulaire en procédant de la façon suivante :

- *Si besoin, on échange la ligne L_i avec une ligne L_i sur laquelle le coefficient a_{i1} est non nul.*
- *A l'aide de combinaisons du type $L_i \longleftarrow aL_i + bL_1$, on annule tous les coefficients a_{i1} pour $i \geqslant 2$.*
- *On recommence ceci sur le sous-système formé des $n-1$ dernières lignes (et ne contenant donc plus que $p-1$ inconnues).*

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{3x} & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} \boxed{3x} & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 & \\ & - & 7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 & \quad L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1 \\ & - & 11y & & & - & t & = & -26 & \quad L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_1 \\ & & y & + & 12z & - & 7t & = & -26 & \quad L_4 \leftarrow 3L_4 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 & \\ & & \boxed{-7y} & + & 6z & - & 5t & = & -34 & \\ & & & - & 66z & + & 48t & = & 192 & \quad L_3 \leftarrow 7L_3 - 11L_2 \\ & & & & 90z & - & 54t & = & -216 & \quad L_4 \leftarrow 7L_4 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 & \\ & - & 7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 & \\ & & & & \boxed{-66z} & + & 48t & = & 192 & \\ & & & & & & 756t & = & 3024 & \quad L_4 \leftarrow 66L_4 + 90L_3 \end{array}\right.$$

En remontant le système, on obtient $t = 4$, puis $-66z = 192 - 48t = 0$, donc $z = 0$. Puis $7y = 34 + 6z - 5t = 14$, donc $y = 2$, et enfin $3x = 7 - y + 3z - 2t = -3$, donc $x = -1$. Le système a donc une unique solution

$$\mathcal{S} = \{(-1, 2, 0, 4)\}$$

Les calculs étaient fastidieux pour une solution assez simple ...
En fait, si on choisissait d'autres pivots, on aurait pu simplifier les calculs.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 & \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 & \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} \boxed{x} & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 & \quad L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ & & y & - & 4z & + & 3t & = & 14 & \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ & - & 2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 & \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & y & - & 4z & + & 3t & = & 14 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & - & 2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & \boxed{y} & - & 4z & + & 3t & = & 14 \\ & & & & 22z & - & 16t & = & -64 \\ & & & - & 2z & + & 2t & = & 8 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ & & y & - & 4z & + & 3t & = & 14 \\ & & & & \boxed{22z} & - & 16t & = & -64 \\ & & & & & & 6t & = & 24 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow 11L_4 + L_3 \end{array}$$

On retrouve évidemment la même solution que tout à l'heure.