

Trigonométrie

9.1 Fonctions circulaires

9.1.1 Définitions

Définition 1

Pour tout réel x , on définit $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les nombres définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Proposition 2

Les fonctions \cos et \sin sont donc définies sur \mathbb{R} , et vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Démonstration :

Cela vient de la définition : ce sont les coordonnées du point sur le cercle trigonométrique. Les abscisses et ordonnées sont donc toujours dans $[-1, 1]$ et le théorème de Pythagore nous donne la deuxième relation.

Proposition 3

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \cos(y) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} / x = y + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} / x = -y + 2k\pi \end{cases} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sin(y) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} / x = y + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} / x = (\pi - y) + 2k\pi \end{cases}$$

Remarque :

$$\boxed{\cos(x) = 0} \iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\boxed{\cos(x) = 1} \iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = 2k\pi$$

$$\boxed{\cos(x) = -1} \iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = \pi + 2k\pi$$

$$\boxed{\sin(x) = 0} \iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = k\pi$$

$$\boxed{\sin(x) = 1} \iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\boxed{\sin(x) = -1} \iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Définition 4

On appelle **fonction tangente**, la fonction \tan définie par l'expression : $\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}$.

Elle est définie partout où $\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Valeurs remarquables des cos, sin, tan :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	**

9.1.2 Propriétés trigonométriques**Proposition 5****Parité, périodicité**

La fonction cosinus est 2π -périodique et paire sur \mathbb{R} .

La fonction sinus est 2π -périodique et impaire sur \mathbb{R} .

La fonction tangente est π -périodique et impaire sur son domaine de définition.

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\cos(-x) = \cos(x)} \quad \boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos(x)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\sin(-x) = -\sin(x)} \quad \boxed{\sin(x + 2\pi) = \sin(x)}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \boxed{\tan(-x) = -\tan(x)} \quad \boxed{\tan(x + \pi) = \tan(x)}$$

Proposition 6**Formules de symétries**

Pour tout réel x tel que les expressions aient un sens, on a par lecture du cercle trigonométrique :

$$\boxed{\cos(x + \pi) = -\cos(x)}$$

$$\boxed{\sin(x + \pi) = -\sin(x)}$$

$$\boxed{\tan(x + \pi) = \tan(x)}$$

$$\boxed{\cos(\pi - x) = -\cos(x)}$$

$$\boxed{\sin(\pi - x) = \sin(x)}$$

$$\boxed{\tan(\pi - x) = -\tan(x)}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)}$$

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)}}$$

$$\boxed{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)}$$

$$\boxed{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)}$$

$$\boxed{\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(x)}}$$

Remarque :

Il existe aussi de nombreuses autres formules trigonométriques liant les fonctions cosinus et sinus, mais seules les précédentes sont à connaître par coeur. Toutes les autres sont à re-démontrer, et le résultat sera toujours donné par l'énoncé.

Exemples :

E1 – Montrer que pour tous réels a et b , on a les **formules d'addition suivantes** :

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b)}$$

On a $\cos(a+b) = \operatorname{Re}(e^{i(a+b)})$ et $\sin(a+b) = \operatorname{Im}(e^{i(a+b)})$.

Or, on peut écrire :

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia}e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b)) \end{aligned}$$

Par unicité des parties réelles et imaginaires de $e^{i(a+b)}$, on en déduit donc bien que d'une part : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ et que d'autre part : $\sin(a+b) = \sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b)$.

E2 – Montrer que pour tous réels a et b , on a les **formules de l'angle moitié** :

$$\boxed{\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}, \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

On a $\cos(a) + \cos(b) = \operatorname{Re}(e^{ia}) + \operatorname{Re}(e^{ib}) = \operatorname{Re}(e^{ia} + e^{ib})$. De même $\sin(a) + \sin(b) = \operatorname{Im}(e^{ia} + e^{ib})$.

Or, on a :

$$\begin{aligned} e^{ia} + e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}} \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{i\frac{b-a}{2}} \right) = e^{i\frac{a+b}{2}} 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + i 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

Par unicité des parties réelles et imaginaires de $e^{ia} + e^{ib}$, on en déduit bien les formules proposées.

E3 – Il existe également des **techniques de linéarisation** des puissances de cosinus ou sinus.

Par exemple : peut-on linéariser $\cos^4(x)$, i.e. écrire $\cos^4(x)$ comme une somme de termes de la forme $\lambda \cos(\beta x)$ ou $\mu \sin(\gamma x)$.

On utilise alors les formules d'Euler, puis la formule du Binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{1}{2^4} \left(e^{4ix} + \binom{4}{1} e^{3ix} e^{-ix} + \binom{4}{2} e^{2ix} e^{-2ix} + \binom{4}{3} e^{ix} e^{-3ix} + e^{-4ix} \right) \\ &= \frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) = \frac{1}{16} ((e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6) \\ &= \frac{1}{16} (2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6) = \boxed{\frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}} \end{aligned}$$

De même, peut-on linéariser $\cos^3(x)\sin(x)$?

$$\begin{aligned} \cos^3(x)\sin(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = \frac{1}{16i} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) (e^{ix} - e^{-ix}) \\ &= \frac{1}{16i} ((e^{4ix} - e^{-4ix}) + 2(e^{2ix} - e^{-2ix})) = \frac{1}{16i} (2i\sin(4x) + 4i\sin(2x)) = \boxed{\frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{4}\sin(2x)} \end{aligned}$$

9.1.3 Etude de la fonction cosinus

Théorème 7

Dérivation de l'exponentielle complexe, admis

La fonction $x \mapsto e^{ix}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et elle se dérive comme toute fonction du type $x \mapsto e^{u(x)}$ avec $u(x) = ix$ et $u'(x) = i$. On a donc :

$$\text{si } \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = e^{ix}, \quad \text{alors } \forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = ie^{ix}$$

Proposition 8

La fonction cos, donnée par $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$$

Démonstration :

La fonction cos est \mathcal{C}^∞ en tant que somme de deux fonctions \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

$$\text{De plus, } \forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = \frac{ie^{ix} + (-i)e^{-ix}}{2} = \frac{i}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{i}{2}(2i \sin(x)) = i^2 \sin(x) = -\sin(x).$$

Proposition 9

La fonction cos admet un DL de tout ordre en 0 qui est :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$$

Démonstration :

La fonction cos étant de classe \mathcal{C}^∞ sur au moins $] -1, 1[$, le théorème de Taylor-Young assure qu'elle admet bien un DL de tout ordre en 0.

On sait que pour tout entier $n \geq 0$, $e^{ix} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(ix)^k}{k!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$ et $e^{-ix} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-ix)^k}{k!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$, donc par somme des DL, on obtient :

$$e^{ix} + e^{-ix} = \sum_{k=0}^{2n} (i^k + (-i)^k) \frac{x^k}{k!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$$

Or, dès que k est impair, on a $(-i)^k = -i^k$, donc dans la somme précédente, il ne reste que les k pairs, et lorsque k pair, en écrivant $k = 2j$, on a : $i^k + (-i)^k = i^{2j} + (-i)^{2j} = (i^2)^j + ((-i)^2)^j = (-1)^j + (-1)^j = 2(-1)^j$. On a donc :

$$e^{ix} + e^{-ix} = \sum_{j=0}^n 2(-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$$

et on obtient alors le DL de $\cos(x)$ au voisinage de 0.

Remarque :

En pratique pour obtenir le DL de cos en 0 :

- On écrit le DL de e^x : $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$
- On ne garde que les termes dont la puissance est paire : $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$
- On rajoute une alternance de signes : $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

Proposition 10

On a donc : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ et en particulier : $\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$.

9.1.4 Etude de la fonction sinus

Proposition 11

La fonction sin, donnée par $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$$

Démonstration :

sin est \mathcal{C}^∞ en tant que somme de deux fonctions \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

$$\text{De plus : } \forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \frac{ie^{ix} - (-i)e^{-ix}}{2i} = \frac{i}{2i}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}(2\cos(x)) = \cos(x).$$

Proposition 12

La fonction sin admet un Développement Limité de tout ordre en 0 qui est :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$$

Remarques :

R1 – En pratique pour obtenir le DL de sin en 0 :

- On écrit le DL de e^x : $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$
- On ne garde que les termes dont la puissance est impaire : $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$
- On rajoute une alternance de signes : $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

R2 – En particulier, remarquons que $\sin(x) = x + o(x^2)$, donc $\boxed{\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x}$.

9.1.5 Etude de la fonction tangente

Proposition 13

La fonction tan est de classe \mathcal{C}^∞ sur son ensemble de définition et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \boxed{\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}$$

Démonstration :

Puisque sin et cos sont \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , la fonction tan est \mathcal{C}^∞ sur son ensemble de définition en tant que quotient de fonctions \mathcal{C}^∞ le dénominateur ne s'annulant jamais. De plus, en notant $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a :

$$\forall x \in D, \tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{(\cos(x))^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(x)} \\ 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \end{cases}$$

Remarques :

R1 – Puisque $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et que $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$, on a donc $\boxed{\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x}$

R2 – La fonction tan est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\pi/2, \pi/2[$, donc elle admet un DL de tout ordre en 0, mais ce DL est compliqué, il n'y a pas de formule explicite pour le coefficient devant x^n . Il faut le faire à la main en faisant le quotient des DL de sin(x) et cos(x).

9.2 Fonctions circulaires réciproques

9.2.1 Fonction Arcsin

Définition 14

La fonction \sin est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Elle est donc bijective de $[-\pi/2, \pi/2]$ vers $[\sin(-\pi/2), \sin(\pi/2)] = [-1, 1]$ et admet donc une fonction réciproque sur ces intervalles, qu'on appelle **fonction Arcsinus**, notée Arcsin .

$$\text{Arcsin} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Remarques :

R1 – Puisque \sin et Arcsin sont réciproques l'une de l'autre, on en déduit que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\text{Arcsin}(x)) = x, \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{Arcsin}(\sin(x)) = x$$

R2 – Puisque \sin est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$, la fonction Arcsin est également strictement croissante sur $[-1, 1]$

R3 – On a pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\text{Arcsin}(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.

Proposition 15

La fonction Arcsin est continue sur $[-1, 1]$ et de classe \mathcal{C}^∞ uniquement sur $] - 1, 1[$. De plus

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Démonstration :

Puisque la fonction \sin est dérivable sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et que $\sin' = \cos$, on sait que :

$$\text{Arcsin dérivable en } \sin(a) \iff \sin'(a) \neq 0 \iff \cos(a) \neq 0 \iff a \notin \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ainsi Arcsin est dérivable sur tout $[-1, 1]$ sauf en $\sin(-\pi/2) = -1$ et en $\sin(\pi/2) = 1$, autrement dit, Arcsin est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] - 1, 1[$. De plus,

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad \text{Arcsin}'(x) = (\sin^{-1})'(x) = \frac{1}{\sin'(\sin^{-1}(x))} = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Proposition 16

Puisque la fonction Arcsin est dérivable en 0 et que sa dérivée vaut $\frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arcsin}(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \text{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

9.2.2 Fonction Arccos

Définition 17

La fonction \cos est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Elle est donc bijective de $[0, \pi]$ vers $[\cos(\pi), \cos(0)] = [-1, 1]$ et admet donc une fonction réciproque sur ces intervalles, qu'on appelle **fonction Arccosinus**, notée Arccos .

$$\text{Arccos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

Remarques :

R1 – Puisque \cos et Arccos sont réciproques l'une de l'autre, on en déduit que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\text{Arccos}(x)) = x, \quad \forall x \in [0, \pi], \quad \text{Arccos}(\cos(x)) = x$$

R2 – Puisque \cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, la fonction Arccos est également strictement décroissante sur $[-1, 1]$

R3 – Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\text{Arccos}(x))} = \sqrt{1 - x^2}$.

Proposition 18

La fonction Arccos est continue sur $[-1, 1]$ et de classe \mathcal{C}^∞ uniquement sur $] -1, 1[$. De plus

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Démonstration :

Puisque la fonction \cos est dérivable sur $[0, \pi]$ et que $\cos' = -\sin$, on sait que :

$$\text{Arccos dérivable en } \cos(a) \iff \cos'(a) \neq 0 \iff -\sin(a) \neq 0 \iff a \notin \{0, \pi\}$$

Ainsi Arccos est dérivable sur tout $[-1, 1]$ sauf en $\cos(0) = 1$ et en $\cos(\pi) = -1$, autrement dit, Arccos est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$. De plus,

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \text{Arccos}'(x) = (\cos^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos'(\cos^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos}(x))} = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Remarque :

On peut également obtenir un DL de $\text{Arccos}(x)$ (ou de $\text{Arcsin}(x)$) en 0 en remarquant que :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}(-x^2)^2 + \dots$$

et en prenant la primitive, avec la bonne constante, on obtient un DL de $\text{Arcsin}(x)$ ou de $\text{Arccos}(x)$. Puisque $\text{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}$, on obtient par exemple que :

$$\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

9.2.3 Fonction Arctan

Définition 19

La fonction \tan est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle est donc bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $]\lim_{x \rightarrow -\pi/2} \tan(x), \lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan(x)[=]-\infty, +\infty[$ et admet donc une fonction réciproque sur ces intervalles, qu'on appelle **fonction Arctangente**, notée Arctan .

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Remarques :

R1 – Puisque \tan et Arctan sont réciproques l'une de l'autre, on en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\text{Arctan}(x)) = x, \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \text{Arctan}(\tan(x)) = x$$

R2 – Puisque \tan est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la fonction Arctan est également strictement croissante sur \mathbb{R}

Proposition 20

La fonction Arctan est de classe \mathcal{C}^∞ e sur \mathbb{R} . De plus $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Démonstration :

Puisque la fonction \tan est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$, on est certain que Arctan est bien de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}'(x) = (\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{\tan'(\tan^{-1}(x))} = \frac{1}{\tan'(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\text{Arctan}(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Proposition 21

La fonction Arctan admet pour limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$.

Sa courbe représentative admet donc deux asymptotes horizontales d'équations $y = -\frac{\pi}{2}$ et $y = \frac{\pi}{2}$.