CHAPITRE 8

Nombres complexes

8.1 Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

8.1.1 Définitions

Définition 1

On appelle **ensemble des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme

$$a + ib, \qquad \text{avec } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$$

où i est un nombre imaginaire qui vérifie $i^2 = -1$.
Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est alors unique :

- le réel a s'appelle la **partie réelle de z**, notée $a = \text{Re}(z)$.
- le réel b s'appelle la **partie imaginaire de z**, notée $b = \text{Im}(z)$.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes partie réelle et partie imaginaire.

Remarques :

R 1 – Cette représentation sous la forme $a + ib$ d'un nombre complexe s'appelle la **forme algébrique** du nombre complexe.

R 2 – Les nombres réels sont des nombres complexes qui ont une partie imaginaire nulle.

R 3 – Les nombres complexes de la forme ib sont eux appelés des **imaginaires purs**.

R 4 – On peut agir sur les nombres complexes comme sur les réels : les règles de développement et de factorisation sont encore vraies, il faut juste utiliser que $i^2 = -1$.

R 5 – On peut additionner deux nombres complexes :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

R 6 – On peut aussi multiplier deux nombres complexes :

$$(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

8.1.2 Conjugué

Définition 2

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle **nombre complexe conjugué de z** le complexe, noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a - ib$.

Proposition 3

Soient $z = a + ib$ et $z' = a - ib$ deux nombres complexes. Alors

1. $\boxed{z \times \overline{z} = a^2 + b^2}$ *: c'est toujours un réel positif.*
2. $\boxed{Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}}$ *et* $\boxed{Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. *z est un nombre réel* $\Longleftrightarrow z = \overline{z}$ *et* *z est un imaginaire pur* $\Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
5. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ *et* $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

Remarque :

On peut aussi définir l'inverse d'un nombre complexe (non nul) en s'aidant du conjugué :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \times \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$$

8.1.3 Module d'un nombre complexe

Définition 4

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Alors, on appelle **module de z** le réel positif noté $|z|$ défini par

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Proposition 5

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors

1. $\boxed{z \times \overline{z} = |z|^2}$
2. $|z| = |\overline{z}|$
3. $Re(z) \leqslant |z|$ *et* $Im(z) \leqslant |z|$
4. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

Théorème 6 ***Inégalité triangulaire***

Pour tous nombres complexes z et z' dans $\mathbb{C}$, on a $\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$.

Démonstration :

$|z + z'|^2 = (z + z')\overline{(z + z')} = z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + \overline{z}z' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|zz'| = (|z| + |z'|)^2$

D'où le résultat en passant à la racine carrée des deux côtés, on a bien l'inégalité voulue.

8.1.4 Exponentielle exponentielle

Définition 7

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 et de centre 0. Ce cercle correspond à l'ensemble

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$$

On repère chaque point de $\mathcal{C}$ par un angle $\theta = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$ (angle avec l'axe horizontal). Ce point a donc pour coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Ainsi pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{U}$,

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \ / \ z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

On dit que θ est un **argument** du nombre complexe z.

Remarques :

R 1 – Si on a un nombre complexe quelconque z non nul, on peut donc lui définir un argument, qui sera celui de $\dfrac{z}{|z|}$.

R 2 – Un nombre complexe z (non nul) est donc complètement défini par son module $\rho = |z|$ et un de ses arguments θ.

Définition 8

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe égal à : $\boxed{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$. Si $z = a + ib$, on peut noter plus généralement l'exponentielle du nombre complexe z par

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a\left(\cos(b) + i\sin(b)\right)$$

Remarques :

R 1 – Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{\cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta})}$ et $\boxed{\sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})}$.

R 2 – Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$

R 3 – $|e^{i\theta}| = 1$

R 4 – $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$

Théorème 9 ***Formule de Moivre***

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\boxed{(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$.

Autrement dit, on a : $\boxed{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$.

Théorème 10 ***Formules d'Euler***

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}, \qquad \boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

8.1.5 Forme trigonométrique

Définition 11

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle **argument** de z tout réel θ qui vérifie

$$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}}$$

On note $\arg(z)$ un tel réel. L'écriture $z = |z|e^{i\arg(z)}$ est appelée la **forme trigonométrique** (ou **forme exponentielle**) de z.

Proposition 12

Soient z et z' deux nombres complexes, alors

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \arg(z) = \arg(z') + 2k\pi \end{cases}$$

Remarques :

- **R 1** – Le module est unique, on dit donc "le" module de z
- **R 2** – Il n'y a pas unicité de l'argument d'un complexe, on dit donc "un" argument de z. L'argument est défini "modulo 2π".
- **R 3** – Un complexe z admet un unique argument dans $[0, 2\pi[$, un unique argument dans $]-\pi, \pi]$, dans tout intervalle $[a, b[$ ou $]a, b]$ de longueur 2π.

8.2 Equations dans $\mathbb{C}$

8.2.1 Factorisations dans $\mathbb{C}$

Proposition 13 — ***Formule du binôme de Newton***

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}}$$

Démonstration :

Même démonstration que pour les réels, par récurrence.

Proposition 14 — $a^n - b^n$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes et soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2) \sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-1-k}}$$

Démonstration :

Il suffit de développer le second membre et on obtient le membre de gauche.

8.2.2 Racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$

Définition 15

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième de Z** tout nombre z qui vérifie $z^n = Z$.

Remarques :

- **R 1** – Si $n = 2$, on appelle racine carrée d'un nombre complexe, tout nombre z qui vérifie $z^2 = Z$. Par exemple, i est une racine carrée de -1.
- **R 2** – On n'écrit JAMAIS $\sqrt{z}$ pour z complexe (sauf si c'est un réel positif).
- **R 3** – On n'écrit JAMAIS $z^{1/2}$ (sauf si c'est un réel strictement positif).

Théorème 16 ***Racines n-ièmes de l'unité***

Les n racines n-ièmes de 1 sont exactement les nombres

$$\boxed{\omega_k = \exp\left(ik\frac{2\pi}{n}\right), \quad k \in [\![0, n-1]\!]}$$

Il y en a donc exactement n. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de 1.

Démonstration :

Cherchons z sous sa forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff \rho^n e^{in\theta} = 1e^{i0} \\ &\iff \begin{cases} \rho^n = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ n\theta = 2k\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ z = \exp\left(ik\frac{2\pi}{n}\right) = \omega_k \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, cherchons les racines n-ièmes égales pour en garder le minimum :

$$\begin{aligned} \omega_k = \omega_\ell &\iff \exists p \in \mathbb{Z} \ / \ \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\ell\pi}{n} + 2p\pi \\ &\iff \exists p \in \mathbb{Z} \ / \ k = \ell + pn \end{aligned}$$

Donc ω_k et ω_ℓ sont distincts si et seulement si ℓ et k diffèrent d'un multiple de n. On peut donc se restreindre à prendre n ω_i "consécutifs" qui seront donc bien distincts (par exemple $i \in [\![0, n-1]\!]$) et on obtient bien toutes les racines n-ièmes de 1.

Proposition 17

Tout nombre complexe non nul Z possède exactement n racines n-ièmes distinctes.
Si on connait une des racines (par exemple $z_0 = \sqrt[n]{|Z|}e^{iarg(Z)/n}$), on obtient toutes les racines en multipliant z_0 par les n racines de l'unité.

Proposition 18

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme des n racines n-ièmes de l'unité est nulle. Autrement dit

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = 0}$$

Démonstration :

En effet, on obtient une somme de termes d'une suite géométrique. Notons $q = \omega_1 = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Alors, on a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = q^k$. Ainsi, puisque $q \neq 1$, on a : $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} = 0$.

Remarques :

R 1 – On a $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$

R 2 – On a $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ avec $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. On a en particulier : $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$.

R 3 – On a $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$ avec $i^2 = -1$

Démonstration :

En effet, si on pose $z_0 = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\arg(Z)/n}$, on a bien $z_0^n = |Z|e^{i\arg(Z)} = Z$, donc z_0 est bien une racine n-ième de Z.

Cherchons donc maintenant toutes les autres. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z^n = Z \iff z^n = z_0^n &\iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ \frac{z}{z_0} = \omega_k \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \ / \ z = z_0\omega_k \end{aligned}$$

Et les ω_k étant bien deux à deux distincts pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, le nombre complexe Z admet exactement n racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$.

Proposition 19

Tout nombre complexe non nul Z possède exactement 2 racines carrées dans $\mathbb{C}$.
En particulier, l'équation $z^2 = a^2$ admet exactement deux solutions qui sont $z = a$ et $z = -a$.

Remarques :

R 1 – Si α est un réel strictement positif, alors : $z^2 = \alpha \iff z = \sqrt{\alpha}$ ou $z = -\sqrt{\alpha}$.

R 2 – Si β est un réel strictement négatif, alors :

$$z^2 = \beta \iff z^2 = (i\sqrt{-\beta})^2 \iff z = i\sqrt{-\beta} \text{ ou } z = -i\sqrt{-\beta}$$

R 3 – Soit Z un nombre complexe dont on cherche les racines carrées.

- Si on connaît Z sous forme exponentielle, $Z = \rho e^{i\theta}$ ($\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), alors les racines carrées sont exactement $\pm\sqrt{\rho}e^{i\theta/2}$.

- Si on connaît Z sous forme algébrique, $Z = X + iY$, si on cherche les racines carrées z sous la forme $z = a + ib$, on a :

$$z^2 = Z \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = X & \text{(égalité des parties réelles)} \\ a^2 + b^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} & \text{(égalité des modules)} \\ 2ab = Y & \text{(égalité des parties imaginaires)} \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent a^2 et b^2 et la dernière équation indique si a et b doivent être de même signe ou de signe contraire.

8.2.3 Equation du second degré

Théorème 20

On considère l'équation

$$(E) : az^2 + bz + c = 0$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.
*On appelle **discriminant de l'équation** (E) le complexe $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.*
Alors, si on note δ et $-\delta$ les racines carrées de Δ dans $\mathbb{C}$, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$, sont

$$\frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b+\delta}{2a}$$

(qui sont égales si $\Delta = 0$).

Démonstration :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right] = a\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right) \end{aligned}$$

Proposition 21 ***Relations coefficients-racines***

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Notons z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$. Alors

$$\boxed{z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}}, \qquad \boxed{z_1 z_2 = \frac{c}{a}}$$

Démonstration :

On sait que $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1z_2$. On identifie alors les coefficients et on trouve les relations voulues.

Remarque :

Si a, b, c sont des $\boxed{\text{réels}}$ tels que $a \neq 0$, alors pour résoudre l'équation :

$$az^2 + bz + c = 0$$

on étudie toujours $\Delta = b^2 - 4ac$ qui est cette fois un réel.

- Si $\Delta \geqslant 0$, alors l'équation admet deux solutions (éventuellement confondues si $\Delta = 0$) qui sont

$$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$$\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$