

---

# Continuité et dérivation

---

## 7.1 Continuité d'une fonction

### 7.1.1 Définitions

#### Définition 1

Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $a \in D_f$ . On suppose la fonction  $f$  définie au voisinage de  $a$ .  
On dit alors que  $f$  **est continue en  $a$**  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

#### Définition 2

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .  
On dit que  $f$  **est continue sur  $I$**  si  $f$  est continue en tout point de  $I$ .  
On note  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  (ou  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ ) l'ensemble des fonctions continues sur  $I$ .

#### Proposition 3

*Les fonctions usuelles (sauf la partie entière) sont toutes continues en tout point de leur ensemble de définition. C'est en particulier le cas pour :*

- les fonctions polynomiales*
- les fonctions rationnelles (quotient de deux fonctions polynomiales)*
- la valeur absolue*
- la racine carrée*
- la fonction logarithme népérien*
- les fonctions exponentielles*
- les fonctions puissances*

**Remarques :**

- R1** – Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $I$ ,
  - la somme  $f + g$  est encore une fonction continue sur  $I$
  - le produit  $\lambda f$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) est encore une fonction continue sur  $I$
  - le produit  $f \times g$  est encore une fonction continue sur  $I$
- R2** – Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues sur  $I$  et si  $g$  ne s'annule jamais sur  $I$ , alors la fonction  $\frac{f}{g}$  est encore une fonction continue sur  $I$ .
- R3** – Si  $f$  est continue sur  $I$  et si  $g$  est continue sur  $J$  avec  $f(I) \subset J$ , alors la composée  $g \circ f$  est continue sur  $I$ .

**7.1.2 Théorème des Valeurs Intermédiaires****Théorème 4**

*L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Autrement dit, si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ , alors  $f(I)$  est encore un intervalle.*

**Remarques :**

- R1** – Les intervalles  $I$  et  $f(I)$  peuvent être de natures différentes (ouvert, fermé, semi-ouvert, borné, non borné, ...)
- R2** – L'intervalle  $f(I)$  peut être réduit à un singleton (la fonction  $f$  est alors constante).

**Théorème 5*****Théorème des valeurs intermédiaires***

*Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Soient  $a, b \in I$  tels que  $a < b$  et  $f(a) \neq f(b)$ . Alors  $f$  prend toutes les valeurs "intermédiaires" comprises entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , i.e.*

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \text{ (ou } [f(b), f(a)]), \quad \exists x \in [a, b] / y = f(x)$$

**Exemple :**

**Existence d'au moins une solution à l'équation  $f(x) = 0$ .**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .

S'il existe deux éléments  $a, b \in I$ ,  $a < b$  tels que  $f(a)f(b) \leq 0$  (i.e.  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes opposés), alors l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $[a, b]$ .

**Remarque :**

L'équation  $f(x) = g(x)$  est équivalente à l'équation  $h(x) = 0$  avec  $h = f - g$ . On peut alors appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur la fonction  $f - g$ .

**Théorème 6**

*Si  $f$  est une fonction continue sur un segment  $[a, b]$ , alors  $f$  est bornée sur  $[a, b]$  et atteint ses bornes.*

**Remarque :**

Autrement dit, sur un segment  $[a, b]$ , une fonction  $f$  aura toujours un maximum et un minimum.

De plus, on aura  $f([a, b]) = \left[ \min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x) \right]$ .

**Proposition 7**

– Si  $f$  est une fonction croissante et continue sur  $[a, b]$ , alors

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

– Si  $f$  est une fonction décroissante et continue sur  $[a, b]$ , alors

$$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$$

**7.1.3 Théorème de la bijection****Proposition 8**

Soit  $I$  un intervalle et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement monotone sur  $I$ .  
Alors  $f$  est une fonction injective.

**Démonstration :**

Supposons par exemple que  $f$  soit strictement croissante sur  $I$ .

Soient  $x, x' \in I$  tels que  $f(x) = f(x')$ .

Il nous faut montrer que  $x = x'$ .

Par l'absurde, si  $x \neq x'$  : il y a deux cas.

– si  $x < x'$ . Alors puisque  $f$  strictement croissante,  $f(x) < f(x')$  : impossible.

– si  $x > x'$ . Alors puisque  $f$  strictement croissante,  $f(x) > f(x')$  : impossible.

Ainsi, il n'est pas possible qu'on ait  $x \neq x'$ . Ainsi  $x = x'$ .

On a donc montré que  $\forall x, x' \in I$ , si  $f(x) = f(x')$ , alors  $x = x'$ .

**Théorème 9***Théorème de la bijection*

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Si

- $f$  est continue sur  $I$
- $f$  est strictement monotone sur  $I$

Alors,  $f$  est une bijection de l'intervalle  $I$  sur l'intervalle  $J = f(I)$ .

De plus, sa réciproque  $f^{-1}$  est également continue sur  $J$  et strictement monotone sur  $J$ , de même sens de variation que  $f$ .

**Exemple :**

**Existence d'exactly une solution à l'équation  $f(x) = 0$ .**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .

S'il existe deux éléments  $a, b \in I$ ,  $a < b$  tels que  $f(a)f(b) \leq 0$  (i.e.  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes opposés), alors l'équation  $f(x) = 0$  admet une et une seule solution dans  $[a, b]$ .

**Remarque :**

Les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $f^{-1}$  sont symétriques par rapport à la droite  $y = x$ .

**Exemple :**

On se sert souvent des bijections pour définir et étudier des **suites implicites**.

→ en TD/DM

## 7.2 Dérivabilité en un point

### 7.2.1 Définitions

#### Définition 10

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $a \in D$  tel que  $f$  soit définie au voisinage de  $a$ . On dit que  $f$  est **dérivable en  $a$**  si la quantité :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie lorsque  $x \rightarrow a$ . Si c'est le cas, cette limite est appelé **nombre dérivé de  $f$  en  $a$** , que l'on note  $f'(a)$ . On a donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

#### Remarques :

**R1** – On peut également dire que  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .

**R2** – La quantité  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  représente le coefficient directeur de la droite joignant les points de coordonnées  $(x, f(x))$  et  $(a, f(a))$ . Si cette quantité admet une limite finie, cela correspond au coefficient directeur de la tangente.

#### Théorème 11

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $a \in D$ . Si la fonction  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors la courbe  $C_f$  admet une tangente au point d'abscisse  $a$ , dont l'équation est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

#### Démonstration :

Notons  $A$  le point de coordonnées  $(a, f(a))$ .

La tangente en  $A$  a nécessairement une équation du type :  $y = \alpha x + \beta$ .

avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Comme on l'a remarqué ci-dessus, le coefficient directeur de la tangente en  $A$  est  $f'(a)$ . On a donc  $\alpha = f'(a)$ . Ainsi l'équation de la tangente est :  $y = f'(a)x + \beta$ .

De plus, la droite doit passer par le point  $A$ . Donc l'équation doit être vérifiée pour  $x = a$  et  $y = f(a)$ . Autrement dit :  $f(a) = f'(a)a + \beta \iff \beta = f(a) - af'(a)$ .

Ainsi l'équation de la droite est :  $y = f'(a)x + f(a) - af'(a) = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

#### Remarque :

Si la quantité  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  tend vers  $\pm\infty$ , la fonction  $f$  ne sera pas dérivable en  $a$ , mais la courbe admettra une (demi-)tangente verticale en  $a$ .

## 7.2.2 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Dérivabilité
1	0	$\mathbb{R}$
$x$	1	$\mathbb{R}$
$x^2$	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^3$	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = (-1)x^{-2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$-\frac{2}{x^3} = (-2)x^{-3}$	$\mathbb{R}^*$

$f(x)$	$f'(x)$	Dérivabilité
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$	$]0, +\infty[$
$x^n$ ( $n \in \mathbb{Z}$ )	$nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$x^\alpha$ ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$

## 7.2.3 Propriétés

**Théorème 12**

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $a \in D$ .

Si la fonction  $f$  est dérivable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

**Démonstration :**

Supposons que la fonction  $f$  soit dérivable en  $a$ . On a donc :  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$ , pour que la fraction admette une limite finie, il est nécessaire qu'on ait une f.l. " $\frac{0}{0}$ ", et donc nécessairement  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ , autrement dit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Remarque :**

La réciproque est fautive. Par exemple, la fonction valeur absolue  $x \mapsto |x|$  est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

**Définition 13**

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $a \in D$ .

– On dit que  $f$  est **dérivable en  $a$  à droite**, si  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe et est finie.

On note alors cette limite  $f'_d(a)$ .

– On dit que  $f$  est **dérivable en  $a$  à gauche**, si  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe et est finie.

On note alors cette limite  $f'_g(a)$ .

**Proposition 14**

$$f \text{ dérivable en } a \in D \iff \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } a \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}$$

**7.2.4 Sommes, produits, quotients****Théorème 15**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables en  $a$ . Alors

1.  $f + g$  est dérivable en  $a$  et

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

2.  $fg$  est dérivable en  $a$  et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

3. Si  $g(a) \neq 0$ , alors  $\frac{f}{g}$  est dérivable en  $a$  et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

4. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f$  est dérivable en  $a$  et  $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$ .

**Démonstration :**

Démonstration pour le produit. Pour tout  $x \in D$  dans un voisinage de  $a$  :

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - fg(a)}{x - a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \frac{f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)f(x) - f(a)g(a)}{x - a} \\ &= \frac{f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))}{x - a} \\ &= f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)g'(a) + f'(a)g(a) \end{aligned}$$

Démonstration pour le quotient. Puisque  $g(a) \neq 0$  et que  $g$  est continue en  $a$ , on sait que sur tout un voisinage de  $a$ , les  $g(x)$  sont non nuls. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x - a} &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x - a} \\ &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{(x - a)g(x)g(a)} \\ &= \frac{(f(x) - f(a))g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{(x - a)g(x)g(a)} \\ &= \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}g(a) - f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}{g(x)g(a)} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2} \end{aligned}$$

## 7.2.5 Dérivée d'une composée

### Théorème 16

Soit  $u : I \rightarrow J$  dérivable en un point  $a \in I$ . Soit  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en  $b = u(a) \in J$ . Alors la fonction  $f \circ u$  est dérivable en  $a$  et  $(f \circ u)'(a) = u'(a) \times f'(u(a))$ .

Lorsqu'on a une expression qui est de la forme " $f(u(x))$ ", on utilise donc le tableau suivant des dérivées usuelles de composées :

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)$	$u'(x)$	$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$u(x)^2$	$2u'(x)u(x)$	$u(x)^n \ (n \in \mathbb{Z})$	$nu'(x)u(x)^{n-1}$
$u(x)^3$	$3u'(x)u(x)^2$	$u(x)^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha u'(x)u(x)^{\alpha-1}$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{u(x)^2}$	$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\frac{1}{u(x)^2}$	$-\frac{2u'(x)}{u(x)^3}$	$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$

## 7.2.6 Dérivée d'une fonction réciproque

### Théorème 17

Soit  $f : I \rightarrow J = f(I)$  une fonction continue et strictement monotone sur  $I$ . On sait alors que  $f$  est une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$ . Soit  $a \in I$  tel que  $f$  soit dérivable en  $a$ . Notons  $b = f(a) \in J$  (et donc  $a = f^{-1}(b)$ ). Alors

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } b = f(a) \iff f'(a) \neq 0$$

Dans ce cas, on a :

$$(f^{-1})'(b) = (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

### Remarque :

Graphiquement, une fonction est dérivable en un point si sa courbe représentative admet une tangente NON VERTICALE en ce point.

Puisque les courbes de  $f$  et  $f^{-1}$  sont symétriques par rapport à l'axe  $y = x$ , la courbe de  $f^{-1}$  admet bien une tangente non verticale en un point si et seulement si la courbe de  $f$  n'admet pas de tangente horizontale au point symétrique. C'est pour cela qu'il faut que  $f'(a) \neq 0$ .

## 7.2.7 Dérivabilité et équivalent

### Théorème 18

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$  telle que  $f'(a) \neq 0$ . Alors :  $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f'(a)(x - a)$

Exemples :

E1 -

$$\exp(x) - \exp(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \exp'(0)(x - 0) \implies \boxed{e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x}$$

$$\ln(x) - \ln(0) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \ln'(1)(x - 1) \implies \boxed{\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1}$$

En notant  $\forall x > -1$ ,  $f(x) = \ln(1 + x)$  et donc  $f'(x) = \frac{1}{1 + x}$

$$f(x) - f(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} f'(0)(x - 0) \implies \boxed{\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x}$$

En notant  $\forall x > -1$ ,  $g(x) = (1 + x)^\alpha$  et donc  $g'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}$

$$g(x) - g(0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} g'(0)(x - 0) \implies \boxed{(1 + x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x}$$

## 7.3 Dérivation sur un intervalle

### 7.3.1 Classe d'une fonction

#### Définition 19

Soit  $f$  une fonction définie sur son domaine de définition  $D_f$ . Si  $E$  désigne l'ensemble des points de  $D_f$  en lesquels  $f$  est dérivable, on définit alors une fonction sur  $E$ , notée  $f'$ , telle que  $f' : \begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{matrix}$ . Cette fonction est appelée la **fonction dérivée de  $f$** .

#### Définition 20

On appelle **dérivée  $n$ -ième de  $f$**  l'action de dérivée  $n$  fois la fonction  $f$  :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad \forall n \geq 1, \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})' = (f')^{(n-1)}$$

Une fonction  $f$  est  $n$ -fois dérivable sur  $I$  si elle est  $(n - 1)$ -fois dérivable sur  $I$  et si la fonction  $f^{(n-1)}$  est dérivable sur  $I$ .

Remarques :

R1 - On note :

- $\mathcal{C}^0(I)$  l'ensemble des fonctions **continues sur  $I$** .
- $\mathcal{C}^1(I)$  l'ensemble des fonctions **continûment dérivables sur  $I$** , i.e. l'ensemble des fonctions qui sont dérivables sur  $I$  dont la fonction dérivée  $f'$  est continue sur  $I$ .
- $\mathcal{C}^n(I)$  l'ensemble des fonctions  **$n$  fois continûment dérivables sur  $I$** , i.e. l'ensemble des fonctions  $n$ -fois dérivables sur  $I$  dont la fonction dérivée  $n$ -ième  $f^{(n)}$  est continue sur  $I$ ;
- $\mathcal{C}^\infty(I)$  l'ensemble des **fonctions indéfiniment dérivables sur  $I$**

R2 - On a les inclusions suivantes :  $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I) \subset \mathbb{R}^I$



### 7.3.2 Dérivées $n$ -ièmes usuelles

#### Proposition 21

#### Dérivée $n$ -ième d'une puissance

Notons  $f : x \mapsto x^n$  où  $n \in \mathbb{N}$ . Alors la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

#### Remarque :

Pour tout réel  $x$ , on a  $f(x) = x^n$ ,  $f'(x) = nx^{n-1}$ ,  $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ ,  $\dots$ ,  $f^{(n)}(x) = n!$  et  $f^{(n+1)}(x) = 0$ .

#### Proposition 22

#### Dérivée $n$ -ième de la fonction inverse

Notons  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ . Alors la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

#### Démonstration :

Montrons-le par récurrence :

$$k = 0 : f \text{ est 0-fois dérivable sur } I \text{ et } \forall x \in I, f(x) = \frac{(-1)^0 0!}{x^{0+1}}.$$

Soit  $k \geq 0$ . On suppose la propriété vraie au rang  $k$ .

Posons  $f^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$  qui est dérivable sur  $I$  puisque  $x \mapsto x^{k+1}$  l'est et n'est jamais nulle, donc  $f$  est bien  $(k+1)$ -fois dérivable sur  $I$  et

$$\forall x \in I, f^{(k+1)}(x) = (-1)^k k! \times \frac{-(k+1)}{x^{k+2}} = \frac{(-1)^{k+1} (k+1)!}{x^{k+2}}$$

#### Proposition 23

#### Dérivée $n$ -ième des fonctions $\exp$ et $\ln$

La fonction exponentielle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \exp^{(n)}(x) = \exp(x)$$

La fonction  $\ln$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$$

#### Démonstration :

C'est évident pour la fonction  $\exp$ .

De plus, on sait que  $\forall x > 0$ ,  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ , donc en notant  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ , on a :

$$\forall x > 0, \ln^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$$

### 7.3.3 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

#### Proposition 24

#### Stabilité par combinaison linéaire

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$ , alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda f + g)$  est encore une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  et de plus :

$$(\alpha f + g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + g^{(n)}$$

#### Proposition 25

#### Formule de Leibniz

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$ , alors le produit  $(fg)$  est encore de classe  $\mathcal{C}^n$  et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

#### Remarques :

**R1** – On remarque l'analogie avec la formule du Binôme de Newton

**R2** – De même, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle  $I$  et si  $g$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $I$ , alors la fonction  $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur l'intervalle  $I$ , mais on n'a pas a priori de formule pour calculer  $\left(\frac{f}{g}\right)^{(n)}$ .

#### Proposition 26

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(I) \subset J$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ , et si  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $J$ , alors  $g \circ f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$ .

#### Remarque :

On n'a a priori pas de formule pour calculer directement  $(g \circ f)^{(n)}$ .

#### Proposition 27

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles et soit  $f$  une fonction bijective de  $I$  dans  $J$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ , et si  $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$ , alors la fonction réciproque  $f^{-1}$  est également de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $J$ .

#### Remarques :

**R1** – Autrement dit, si  $f$  est bijective et de classe  $\mathcal{C}^n$ , il suffit que  $f^{-1}$  soit dérivable pour que  $f^{-1}$  soit finalement de classe  $\mathcal{C}^n$ .

#### Exemples :

**E1** – Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La fonction  $f_\alpha = x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$$

**E2** – Pour  $a > 0$ , la fonction  $f_a : x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_a^{(n)}(x) = (\ln(a))^n a^x$$

## 7.4 Théorèmes de dérivabilité

### 7.4.1 Théorème Limite de la Dérivée

#### Théorème 28

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$  mais de classe  $\mathcal{C}^n$  a priori uniquement sur  $[a, b[$ .  
Si la fonction  $f^{(n)}$  admet une limite finie  $\ell$  en  $b$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $[a, b]$  et  $f^{(n)}(b) = \ell$ .

#### Proposition 29

Soit  $I$  un intervalle et soit  $a \in I$ .  
Soit  $f$  une fonction continue sur  $I$  (donc en  $a$ ) et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I \setminus \{a\}$ .  
Si  $f'$  admet une limite finie en  $a$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$$

#### Remarque :

Attention, la continuité en  $a$  est importante

### 7.4.2 Condition nécessaire d'extremum local

#### Définition 30

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et soit  $x_0 \in I$ .  
On dit que  $f$  admet un **maximum local en  $x_0$**  s'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I, f(x) \leq f(x_0)$$

On dit que  $f$  admet un **minimum local en  $x_0$**  s'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I, f(x) \geq f(x_0)$$

Un **extremum local** est un minimum ou maximum local.

#### Théorème 31

#### Condition nécessaire d'extremum local

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et soit  $x_0$  un point intérieur de  $I$  (i.e. qui n'est pas sur les bords de l'intervalle).

$$\text{Si } f \text{ possède un extremum local en } x_0, \text{ alors } f'(x_0) = 0$$

autrement dit, il est nécessaire que  $f'(x_0) = 0$  pour que  $f$  possède un extremum local en  $x_0$ .

#### Remarque :

Si l'extremum est situé sur l'extrémité  $x_0$  de l'intervalle  $I$ , rien n'impose alors que  $f'(x_0) = 0$

### 7.4.3 Théorème de Rolle

#### Théorème 32

#### Théorème de Rolle

Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$ .

Soit  $f$  une fonction de  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- $f$  continue sur  $[a, b]$
- $f$  dérivable sur  $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors il existe un  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

#### Démonstration :

On sait que  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , donc  $f$  bornée et atteint ses bornes.

Notons  $M = \sup_{[a,b]} f = f(c)$  et  $m = \inf_{[a,b]} f = f(d)$ .

1er cas :  $m = M$ , alors  $\forall x \in [a, b]$ ,  $m \leq f(x) \leq M = m$ , donc  $f(x) = m$ . Ainsi  $f$  est constante sur  $[a, b]$ , d'où  $\forall c \in ]a, b[, f'(c) = 0$ .

2ème cas :  $m < M$ . On a alors  $m < f(a)$  ou  $f(a) < M$  (car sinon  $m \geq f(a)$  et  $f(a) \geq M$ , on aurait  $M \leq f(a) \leq m < M$  : absurde).

Supposons par exemple que  $m < f(a) = f(b)$ , i.e.  $f(d) < f(a) = f(b)$ .

Donc  $d$  est un point intérieur de  $[a, b]$ ,  $f$  est dérivable en  $d$ ,  $f$  admet un extremum en  $d$ , donc on a  $f'(d) = 0$ .

### 7.4.4 Théorème des Accroissements Finis

#### Théorème 33

#### Théorème des Accroissements Finis

Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$ .

Soit  $f$  une fonction de  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- $f$  continue sur  $[a, b]$
- $f$  dérivable sur  $]a, b[$

Alors il existe un  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou autrement dit, il existe un  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

#### Démonstration :

Soit  $\varphi : \begin{matrix} [a, b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - f(a) - K(x - a) \end{matrix}$  où  $K$  est une constante réelle choisie pour que  $\varphi(b) = 0$ .

$K$  existe et est unique, puisque  $K = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

On a :

- $\varphi$  est continue sur  $[a, b]$  car  $f$  l'est
- $\varphi$  est dérivable sur  $]a, b[$  car  $f$  l'est
- $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Donc (Théorème de Rolle), il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\varphi'(c) = 0$ , i.e.  $f'(c) - K = 0$ .

D'où  $K = f'(c)$ , i.e.  $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ .

**Conséquences 34***Inégalité des Accroissements Finis*

Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a < b$ .

Soit  $f$  une fonction de  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

- $f$  continue sur  $[a, b]$
- $f$  dérivable sur  $]a, b[$
- il existe deux réels  $m$  et  $M$  tels que  $\forall x \in ]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$

Alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

**Conséquences 35***Inégalité des Accroissements Finis*

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et s'il existe  $K > 0$  tel que

$$\forall t \in I, |f'(t)| \leq K$$

alors pour tous  $x, y \in I$ , on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

**7.4.5 Variations des fonctions****Théorème 36***Sens de variation d'une fonction*

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est constante sur  $I \iff f' = 0$  sur  $I$
- $f$  est croissante sur  $I \iff f' \geq 0$  sur  $I$
- $f$  est décroissante sur  $I \iff f' \leq 0$  sur  $I$

**Démonstration :**

Montrons l'équivalence pour  $f$  est croissante sur  $I \iff f' \geq 0$  sur  $I$

$\Rightarrow$  Supposons que  $f$  est croissante sur  $I$ . Alors :

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I \setminus \{x_0\}, \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Lorsque  $x \rightarrow x_0$ ,  $f$  étant dérivable en  $x_0$  on obtient en passant à la limite dans l'inégalité :

$$f'(x_0) \geq 0$$

$\Leftarrow$  Soient  $a \leq b$ , deux réels de  $I$ . La fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ , donc

$$\exists c \in ]a, b[ / f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \geq 0 \implies f(a) \leq f(b)$$

donc  $f$  est croissante sur  $I$ .

**Remarque :**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ .

- Si  $f' > 0$  sur  $I$  sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors la fonction  $f$  est strictement croissante.
- Si  $f' < 0$  sur  $I$  sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors la fonction  $f$  est strictement décroissante.

### 7.4.6 Convexité d'une fonction

#### Définition 37

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle  $I$ .

On dit que  $f$  est **convexe sur  $I$**  si une des propositions suivantes (équivalentes) est vérifiée :

- la courbe de  $f$  est au-dessus de toutes ses tangentes
- la fonction  $f'$  est croissante sur  $I$
- la fonction  $f''$  est positive sur  $I$

#### Définition 38

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un intervalle  $I$ .

On dit que  $f$  est **concave sur  $I$**  si  $-f$  est une fonction convexe sur  $I$ , autrement dit si une des propositions suivantes (équivalentes) est vérifiée :

- la courbe de  $f$  est en-dessous de toutes ses tangentes
- la fonction  $f'$  est décroissante sur  $I$
- la fonction  $f''$  est négative sur  $I$

#### Remarque :

Si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$ , et si  $f''$  s'annule en un point  $x_0$  en changeant de signe, alors la fonction  $f$  change de convexité au point  $x_0$ . Le point de coordonnées  $(x_0, f(x_0))$  est alors appelé un **point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}_f$** .

Un point d'inflexion est donc un point où la courbe  $\mathcal{C}_f$  traverse sa tangente.

#### Théorème 39

#### Inégalités de convexité

La fonction exponentielle est une fonction convexe sur  $\mathbb{R}$  et sa courbe est en particulier située au-dessus de sa tangente en 0 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$$

La fonction logarithme népérien est une fonction concave sur  $]0, +\infty[$  et sa courbe est en particulier située en-dessous de sa tangente en 1 :

$$\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$$

ou autrement dit

$$\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$$

## 7.5 Développements limités

### 7.5.1 Développement limité en 0

#### Définition 40

Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de 0.

On dit que  $f$  **admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0** s'il existe  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tels que au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + o(x^n)$$

autrement dit,  $f(x)$  s'écrit localement comme la somme de :

- une fonction polynôme  $\sum_{k=0}^n a_kx^k$ , appelé la **partie régulière du DL**
- une fonction négligeable devant  $x^n$  :  $o(x^n)$ , appelé le **reste du DL**

#### Exemple :

Soit  $f$  la fonction définie par  $\forall x \neq 1, f(x) = \frac{1}{1-x}$ . Cherchons le développement limité de cette fonction au voisinage de 0.

On sait que pour tout  $x$  au voisinage de 0, on a :  $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}$ .

On peut donc écrire que, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) = \frac{x}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 0 \\ &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

On a donc trouvé un développement limité de  $\frac{1}{1-x}$  au voisinage de 0.

#### Définition 41

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Si  $f$  est définie au voisinage de  $x_0$ , on dit que  $f$  **admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$**  s'il existe  $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$  tels que au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n b_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

#### Théorème 42

*Si  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$ , alors la partie régulière de ce développement limité est unique.*

## 7.5.2 Formule de Taylor-Young

### Théorème 43

### Formule de Taylor-Young

Si  $f$  est une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur un intervalle  $I$  et si  $x_0 \in I$ , alors  $f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de  $x_0$  :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \iff f(x_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + o(h^n)$$

### Remarque :

Le plus souvent, on utilise ce théorème dans le cas particulier où  $x_0 = 0$ , ce qui donne :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

### Proposition 44

Si  $f$  possède un DL d'ordre  $n$  en  $x_0$  :  $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + o((x - x_0)^n)$ , alors, on a nécessairement  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a_0$ .

De plus, au voisinage de  $x_0$ ,  $f$  est équivalente au premier terme non nul de son développement limité : c'est-à-dire que si  $p$  est tel que pour tout  $0 \leq k \leq p - 1$ ,  $a_k = 0$  et  $a_p \neq 0$ , alors, on a au voisinage de  $x_0$  :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} a_p(x - x_0)^p$$

### Théorème 45

### DL usuels AU VOISINAGE DE 0

Les DL usuels suivants existent d'après le Théorème de Taylor-Young. Il faut les apprendre par coeur.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left( \frac{1}{2} - n + 1 \right) \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$



### 7.5.3 Opérations sur les DL

#### Proposition 46

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  admettant chacune un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$$

1. Alors  $f + g$  admet le développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 suivant :

$$(f + g)(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k + o(x^n)$$

2. Alors  $fg$  admet un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 que l'on obtient en faisant le produit des polynômes  $\sum_{k=0}^n a_k x^k$  et  $\sum_{k=0}^n b_k x^k$  et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

#### Exemple :

Calculer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de  $\frac{e^x}{1+x}$ .

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1+x} &= e^x \times \frac{1}{1+x} \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) (1 - x + x^2 + o(x^2)) \\ &= 1 - x + x^2 + x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

#### Proposition 47

Soit  $f : I \rightarrow J$  une fonction admettant un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 et telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k x^k}_{P(x)} + o(x^n)$$

Soit  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction admettant un développement limité d'ordre  $n$  au voisinage de 0 :

$$g(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n b_k x^k}_{Q(x)} + o(x^n)$$

Alors  $g \circ f$  admet un développement limité d'ordre  $n$  que l'on obtient en effectuant  $Q \circ P$  et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

**Exemple :**

Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de  $e^{\sqrt{x+1}}$ .

$$\begin{aligned}
 e^{\sqrt{x+1}} &= \exp\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\
 &= e \times \exp\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\
 &= e \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^2)\right) \\
 &= e \left(1 + \frac{1}{2}x + o(x^2)\right) \\
 &= e + \frac{e}{2}x + o(x^2)
 \end{aligned}$$

**Proposition 48**

Lorsqu'on veut faire le développement limité d'un quotient, on se sert d'une composée avec le développement limité de  $\frac{1}{1+x}$  ou  $\frac{1}{1-x}$ .

**Exemples :**

**E1** – Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de  $\frac{1}{1 + \ln(1+x)}$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 + \ln(1+x)} &= \frac{1}{1+x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\
 &= 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^2) \\
 &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 + o(x^2) \\
 &= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)
 \end{aligned}$$

**E2** – Déterminer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de  $\frac{1}{1 + \sqrt{1+x}}$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}} &= \frac{1}{1 + 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)} \\
 &= \frac{1}{2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3)} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32}\right) + \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32}\right)^2 - \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32}\right)^3\right) + o(x^3) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{5}{64}x^3\right) + o(x^3) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + \frac{x^2}{16} - \frac{5}{128}x^3 + o(x^3)
 \end{aligned}$$

## 7.5.4 Comportement local et DL

**Proposition 49**

Si  $f$  admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de  $x_0$ ,

$$f(x) = a + b(x - x_0) + o((x - x_0))$$

alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $a = f(x_0)$  et  $b = f'(x_0)$ .

Dans ce cas, l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $x_0$  est donc le terme  $y = a + b(x - x_0)$  et pour connaître la position de la courbe par rapport à la tangente, il suffit de regarder le signe du terme suivant du développement limité.

**Exemple :**

Calculons le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + e^x} &= \frac{1}{1 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} \right) + \left( \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} \right)^2 - \left( \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} \right)^3 \right) + o(x^3) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{x}{4}}_{\text{eq. de la tangente}} + \underbrace{\frac{x^3}{48}}_{\text{donne position de la tangente}} + o(x^3) \end{aligned}$$

Donc la courbe représentative de  $f$  admet en 0 une tangente d'équation  $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$ .

De plus, on a  $f(x) - \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{4} \right) = \frac{x^3}{48} + o(x^3)$ , donc au voisinage de 0, la position de la courbe par rapport à

la tangente est donnée par le signe de  $\frac{x^3}{48}$ .

Pour  $x < 0$ , la courbe est en-dessous de la tangente, et pour  $x > 0$ , la courbe est au-dessus de la tangente.