CHAPITRE 7

Continuité et dérivation

7.1 Continuité d'une fonction

7.1.1 Définitions

Définition 1

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ et soit $a \in D_f$. On suppose la fonction f définie au voisinage de a.
On dit alors que f **est continue en** a si $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$.

Définition 2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit que f **est continue sur** I si f est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions continues sur I.

Proposition 3

Les fonctions usuelles (sauf la partie entière) sont toutes continues en tout point de leur ensemble de définition. C'est en particulier le cas pour :
- *les fonctions polynomiales*
- *les fonctions rationnelles (quotient de deux fonctions polynomiales)*
- *la valeur absolue*
- *la racine carrée*
- *la fonction logarithme népérien*
- *les fonctions exponentielles*
- *les fonctions puissances*

Remarques :

R 1 – Si f et g sont deux fonctions continues sur I,
- la somme $f+g$ est encore une fonction continue sur I
- le produit λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) est encore une fonction continue sur I
- le produit $f \times g$ est encore une fonction continue sur I

R 2 – Si f et g sont deux fonctions continues sur I et si g ne s'annule jamais sur I, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est encore une fonction continue sur I.

R 3 – Si f est continue sur I et si g est continue sur J avec $f(I) \subset J$, alors la composée $g \circ f$ est continue sur I.

7.1.2 Théorème des Valeurs Intermédiaires

Théorème 4

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
Autrement dit, si f est continue sur un intervalle I, alors $f(I)$ est encore un intervalle.

Remarques :

R 1 – Les intervalles I et $f(I)$ peuvent être de natures différentes (ouvert, fermé, semi-ouvert, borné, non borné, ...)

R 2 – L'intervalle $f(I)$ peut être réduit à un singleton (la fonction f est alors constante).

Théorème 5 ***Théorème des valeurs intermédiaires***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$.
Alors f prend toutes les valeurs "intermédiaires" comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, i.e.

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \ (ou\ [f(b), f(a)]), \quad \exists x \in [a, b] \ / \ y = f(x)$$

Exemple :

Existence d'au moins une solution à l'équation $f(x) = 0$.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
S'il existe deux éléments $a, b \in I$, $a < b$ tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$ (i.e. $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés), alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Remarque :

L'équation $f(x) = g(x)$ est équivalente à l'équation $h(x) = 0$ avec $h = f - g$. On peut alors appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur la fonction $f - g$.

Théorème 6

Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$, alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.

Remarque :

Autrement dit, sur un segment $[a, b]$, une fonction f aura toujours un maximum et un minimum.
De plus, on aura $f([a, b]) = \left[\min\limits_{x \in [a,b]} f(x), \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)\right]$.

Proposition 7

- *Si f est une fonction croissante et continue sur $[a,b]$, alors*

$$f([a,b]) = \big[f(a), f(b)\big]$$

- *Si f est une fonction décroissante et continue sur $[a,b]$, alors*

$$f([a,b]) = \big[f(b), f(a)\big]$$

7.1.3 Théorème de la bijection

Proposition 8

Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone sur I.
Alors f est une fonction injective.

Démonstration :

Supposons par exemple que f soit strictement croissante sur I.
Soient $x, x' \in I$ tels que $f(x) = f(x')$.
Il nous faut montrer que $x = x'$.
Par l'absurde, si $x \neq x'$: il y a deux cas.
- si $x < x'$. Alors puisque f strictement croissante, $f(x) < f(x')$: impossible.
- si $x > x'$. Alors puisque f strictement croissante, $f(x) > f(x')$: impossible.

Ainsi, il n'est pas possible qu'on ait $x \neq x'$. Ainsi $x = x'$.

On a donc montré que $\forall x, x' \in I$, si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.

Théorème 9 ***Théorème de la bijection***

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si
- *f est continue sur I*
- *f est strictement monotone sur I*

Alors, f est une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$.
De plus, sa réciproque f^{-1} est également continue sur J et strictement monotone sur J, de même sens de variation que f.

Exemple :

Existence d'exactement une solution à l'équation $f(x) = 0$.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
S'il existe deux éléments $a, b \in I$, $a < b$ tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$ (i.e. $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés), alors l'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $[a,b]$.

Remarque :

Les courbes représentatives des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exemple :

On se sert souvent des bijections pour définir et étudier des **suites implicites**.
$\to$ en TD/DM

7.2 Dérivabilité en un point

7.2.1 Définitions

Définition 10

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et soit $a \in D$ tel que f soit définie au voisinage de a.
On dit que **f est dérivable en a** si la quantité :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

admet une limite finie lorsque $x \to a$. Si c'est le cas, cette limite est appelé **nombre dérivé de f en a**, que l'on note $f'(a)$. On a donc

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)}$$

Remarques :

- **R 1** – On peut également dire que $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- **R 2** – La quantité $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ représente le coefficient directeur de la droite joignant les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(a, f(a))$. Si cette quantité admet une limite finie, cela correspond au coefficient directeur de la tangente.

Théorème 11

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et soit $a \in D$. Si la fonction f est dérivable en x_0, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse a, dont l'équation est :

$$\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$$

Démonstration :

Notons A le point de coordonnées $(a, f(a))$.
La tangente en A a nécessairement une équation du type : $y=\alpha x+\beta$.
avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Comme on l'a remarqué ci-dessus, le coefficient directeur de la tangente en A est $f'(a)$. On a donc $\alpha = f'(a)$. Ainsi l'équation de la tangente est : $y = f'(a)x+\beta$.
De plus, la droite doit passer par le point A. Donc l'équation doit être vérifiée pour $x = a$ et $y = f(a)$. Autrement dit : $f(a) = f'(a)a+\beta \iff \beta = f(a) - af'(a)$.
Ainsi l'équation de la droite est : $y = f'(a)x + f(a) - af'(a) = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Remarque :

Si la quantité $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers $\pm\infty$, la fonction f ne sera pas dérivable en a, mais la courbe admettra une (demi-)tangente verticale en a.

7.2.2 Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	Dérivabilité
1	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$-\dfrac{1}{x^2} = (-1)x^{-2}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$	$-\dfrac{2}{x^3} = (-2)x^{-3}$	$\mathbb{R}^*$

$f(x)$	$f'(x)$	Dérivabilité
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$	$]0, +\infty[$
$x^n \ (n \in \mathbb{Z})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
$x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$]0, +\infty[$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

7.2.3 Propriétés

Théorème 12

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et soit $a \in D$.
Si la fonction f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration :

Supposons que la fonction f soit dérivable en a. On a donc : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Puisque $\lim\limits_{x \to a}(x - a) = 0$, pour que la fraction admette une limite finie, il est nécessaire qu'on ait une f.I. "$\dfrac{0}{0}$", et donc nécessairement $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0$, autrement dit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Remarque :

La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Définition 13

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et soit $a \in D$.

– On dit que f est **dérivable en a à droite**, si $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.
  On note alors cette limite $f'_d(a)$.
– On dit que f est **dérivable en a à gauche**, si $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est finie.
  On note alors cette limite $f'_g(a)$.

Proposition 14

$$f \text{ dérivable en } a \in D \iff \begin{cases} f \text{ dérivable à droite en } a \\ f \text{ dérivable à gauche en } a \\ f'_d(a) = f'_g(a) \end{cases}$$

7.2.4 Sommes, produits, quotients

Théorème 15

Soient f et g deux fonctions dérivables en a. Alors

1. *$f+g$ est dérivable en a et*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$
2. *fg est dérivable en a et*
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$
3. *Si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et :*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$
4. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf est dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.*

Démonstration :

Démonstration pour le produit. Pour tout $x \in D$ dans un voisinage de a :
$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x) - fg(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x)(g(x)-g(a)) + g(a)f(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x)(g(x)-g(a)) + g(a)(f(x)-f(a))}{x-a} \\ &= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &\underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)g'(a) + f'(a)g(a)\end{aligned}$$

Démonstration pour le quotient. Puisque $g(a) \neq 0$ et que g est continue en a, on sait que sur tout un voisinage de a, les $g(x)$ sont non nuls. On a alors :
$$\begin{aligned}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} \\ &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)} \\ &= \frac{(f(x)-f(a))g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{(x-a)g(x)g(a)} \\ &= \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a) - f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}{g(x)g(a)} \\ &\underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\end{aligned}$$

7.2.5 Dérivée d'une composée

Théorème 16

Soit $u : I \to J$ dérivable en un point $a \in I$. Soit $f : J \to \mathbb{R}$ dérivable en $b = u(a) \in J$.
Alors la fonction $f \circ u$ est dérivable en a et $\boxed{(f \circ u)'(a) = u'(a) \times f'(u(a))}$.

Lorsqu'on a une expression qui est de la forme "$f(u(x))$", on utilise donc le tableau suivant des dérivées usuelles de composées :

$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)$	$u'(x)$
$u(x)^2$	$2u'(x)u(x)$
$u(x)^3$	$3u'(x)u(x)^2$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$-\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$
$\dfrac{1}{u(x)^2}$	$-\dfrac{2u'(x)}{u(x)^3}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$u(x)^n \ (n \in \mathbb{Z})$	$nu'(x)u(x)^{n-1}$
$u(x)^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha u'(x)u(x)^{\alpha-1}$
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$

7.2.6 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 17

Soit $f : I \to J = f(I)$ une fonction continue et strictement monotone sur I.
On sait alors que f est une bijection de I sur un intervalle J.
Soit $a \in I$ tel que f soit dérivable en a. Notons $b = f(a) \in J$ (et donc $a = f^{-1}(b)$).
Alors

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } b = f(a) \iff f'(a) \neq 0$$

Dans ce cas, on a :

$$\boxed{(f^{-1})'(b) = (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}}$$

Remarque :

Graphiquement, une fonction est dérivable en un point si sa courbe représentative admet une tangente NON VERTICALE en ce point.
Puisque les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à l'axe $y = x$, la courbe de f^{-1} admet bien une tangente non verticale en un point si et seulement si la courbe de f n'admet pas de tangente horizontale au point symétrique. C'est pour cela qu'il faut que $f'(a) \neq 0$.

7.2.7 Dérivabilité et équivalent

Théorème 18

Soit f une fonction dérivable en a telle que $f'(a) \neq 0$. Alors : $\boxed{f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x-a)}$

Exemples :

E 1 –

$$\exp(x) - \exp(0) \underset{x\to 0}{\sim} \exp'(0)(x-0) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

$$\ln(x) - \ln(0) \underset{x\to 1}{\sim} \ln'(1)(x-1) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1}$$

En notant $\forall x > -1,\ f(x) = \ln(1+x)$ et donc $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$$f(x) - f(0) \underset{x\to 0}{\sim} f'(0)(x-0) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x}$$

En notant $\forall x > -1,\ g(x) = (1+x)^\alpha$ et donc $g'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$$g(x) - g(0) \underset{x\to 0}{\sim} g'(0)(x-0) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x}$$

7.3 Dérivation sur un intervalle

7.3.1 Classe d'une fonction

Définition 19

Soit f une fonction définie sur son domaine de définition D_f. Si E désigne l'ensemble des points de D_f en lesquels f est dérivable, on définit alors une fonction sur E, notée f', telle que $f' : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$. Cette fonction est appelée la **fonction dérivée de f**.

Définition 20

On appelle **dérivée n-ième de f** l'action de dérivée n fois la fonction f :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \qquad \forall n \geqslant 1,\ f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' = (f')^{(n-1)}$$

Une fonction f est n-fois dérivable sur I si elle est $(n-1)$-fois dérivable sur I et si la fonction $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I.

Remarques :

R 1 – On note :
- $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions **continues sur I**.
- $\mathcal{C}^1(I)$ l'ensemble des fonctions **continûment dérivables sur I**, i.e. l'ensemble des fonctions qui sont dérivables sur I dont la fonction dérivée f' est continue sur I.
- $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions **n fois continûment dérivables sur I**, i.e. l'ensemble des fonctions n-fois dérivables sur I dont la fonction dérivée n-ième $f^{(n)}$ est continue sur I ;
- $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des **fonctions indéfiniment dérivables sur I**

R 2 – On a les inclusions suivantes : $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I) \subset \mathbb{R}^I$

7.3.2 Dérivées n-ièmes usuelles

Proposition 21 ***Dérivée n-ième d'une puissance***

Notons $f : x \longmapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$. Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, f^{(k)}(x) = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Remarque :

Pour tout réel x, on a $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$, $\ldots$, $f^{(n)}(x) = n!$ et $f^{(n+1)}(x) = 0$.

Proposition 22 ***Dérivée n-ième de la fonction inverse***

Notons $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

Démonstration :

Montrons-le par récurrence :

$k = 0$: f est 0-fois dérivable sur I et $\forall x \in I, f(x) = \dfrac{(-1)^0 0!}{x^{0+1}}$.

Soit $k \geqslant 0$. On suppose la propriété vraie au rang k.

Posons $f^{(k)} : x \mapsto \dfrac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$ qui est dérivable sur I puisque $x \mapsto x^{k+1}$ l'est et n'est jamais nulle, donc f est bien $(k+1)$-fois dérivable sur I et

$$\forall x \in I, f^{(k+1)}(x) = (-1)^k k! \times \frac{-(k+1)}{x^{k+2}} = \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x^{k+2}}$$

Proposition 23 ***Dérivée n-ième des fonctions*** $\exp$ ***et*** $\ln$

La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exp^{(n)}(x) = \exp(x)$$

La fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

Démonstration :

C'est évident pour la fonction exp.

De plus, on sait que $\forall x > 0,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$, donc en notant $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, on a :

$$\forall x > 0,\ \ln^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

7.3.3 Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Proposition 24 ***Stabilité par combinaison linéaire***

Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + g)$ est encore une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et de plus :

$$(\alpha f + g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + g^{(n)}$$

Proposition 25 ***Formule de Leibniz***

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, alors le produit (fg) est encore de classe $\mathcal{C}^n$ et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Remarques :

R 1 – On remarque l'analogie avec la formule du Binôme de Newton

R 2 – De même, si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et si g ne s'annule pas sur l'intervalle I, alors la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I, mais on n'a pas a priori de formule pour calculer $\left(\frac{f}{g}\right)^{(n)}$.

Proposition 26

Soient I et J deux intervalles et soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et si g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J, alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$.

Remarque :

On n'a a priori pas de formule pour calculer directement $(g \circ f)^{(n)}$.

Proposition 27

Soient I et J deux intervalles et soit f une fonction bijective de I dans J.
Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et si $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$, alors la fonction réciproque f^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

Remarques :

R 1 – Autrement dit, si f est bijective et de classe $\mathcal{C}^n$, il suffit que f^{-1} soit dérivable pour que f^{-1} soit finalement de classe $\mathcal{C}^n$.

Exemples :

E 1 – Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $f_\alpha = x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

E 2 – Pour $a > 0$, la fonction $f_a : x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_a^{(n)}(x) = (\ln(a))^n a^x$$

7.4 Théorèmes de dérivabilité

7.4.1 Théorème Limite de la Dérivée

Théorème 28

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ mais de classe $\mathcal{C}^n$ a priori uniquement sur $[a, b[$. Si la fonction $f^{(n)}$ admet une limite finie ℓ en b, alors f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et $f^{(n)}(b) = \ell$.

Proposition 29

*Soit I un intervalle et soit $a \in I$.
Soit f une fonction continue sur I (donc en a) et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$.
Si f' admet une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$$

Remarque :

> Attention, la continuité en a est importante

7.4.2 Condition nécessaire d'extremum local

Définition 30

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.
On dit que f admet un **maximum local en x_0** s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I,\ f(x) \leqslant f(x_0)$$

On dit que f admet un **minimum local en x_0** s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I,\ f(x) \geqslant f(x_0)$$

Un **extremum local** est un minimum ou maximum local.

Théorème 31 ***Condition nécessaire d'extremum local***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit x_0 un point intérieur de I (i.e. qui n'est pas sur les bords de l'intervalle).

$$\text{Si } f \text{ possède un extremum local en } x_0, \text{ alors } f'(x_0) = 0$$

autrement dit, il est nécessaire que $f'(x_0) = 0$ pour que f possède un extremum local en x_0.

Remarque :

> Si l'extremum est situé sur l'extrémité x_0 de l'intervalle I, rien n'impose alors que $f'(x_0) = 0$

7.4.3 Théorème de Rolle

Théorème 32 ***Théorème de Rolle***

Soient a et b deux réels avec $a < b$.
Soit f une fonction de $[a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant :
- *f continue sur $[a, b]$*
- *f dérivable sur $]a, b[$*
- *$f(a) = f(b)$*

Alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration :

On sait que f est continue sur $[a, b]$, donc f bornée et atteint ses bornes.

Notons $M = \sup_{[a,b]} f = f(c)$ et $m = \inf_{[a,b]} f = f(d)$.

1er cas : $m = M$, alors $\forall x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M = m$, donc $f(x) = m$. Ainsi f est constante sur $[a, b]$, d'où $\forall c \in]a, b[$, $f'(c) = 0$.

2ème cas : $m < M$. On a alors $m < f(a)$ ou $f(a) < M$ (car sinon $m \geqslant f(a)$ et $f(a) \geqslant M$, on aurait $M \leqslant f(a) \leqslant m < M$: absurde).

Supposons par exemple que $m < f(a) = f(b)$, i.e. $f(d) < f(a) = f(b)$.

Donc d est un point intérieur de $[a, b]$, f est dérivable en d, f admet un extremum en d, donc on a $f'(d) = 0$.

7.4.4 Théorème des Accroissements Finis

Théorème 33 ***Théorème des Acroissements Finis***

Soient a et b deux réels avec $a < b$.
Soit f une fonction de $[a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant :
- *f continue sur $[a, b]$*
- *f dérivable sur $]a, b[$*

Alors il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ou autrement dit, il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Démonstration :

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - f(a) - K(x - a) \end{array}$ où K est une constante réelle choisie pour que $\varphi(b) = 0$.

K existe et est unique, puisque $K = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On a :
- φ est continue sur $[a, b]$ car f l'est
- φ est dérivable sur $]a, b[$ car f l'est
- $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Donc (Théorème de Rolle), il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, i.e. $f'(c) - K = 0$.

D'où $K = f'(c)$, i.e. $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Conséquences 34 ***Inégalité des Accroissements Finis***

Soient a et b deux réels avec $a < b$.
Soit f une fonction de $[a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant :
- *f continue sur $[a, b]$*
- *f dérivable sur $]a, b[$*
- *il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in]a, b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$*

Alors :
$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

Conséquences 35 ***Inégalité des Accroissements Finis***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et s'il existe $K > 0$ tel que
$$\forall t \in I,\ |f'(t)| \leqslant K$$
alors pour tous $x, y \in I$, on a :
$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$$

7.4.5 Variations des fonctions

Théorème 36 ***Sens de variation d'une fonction***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- *f est constante sur $I \iff f' = 0$ sur I*
- *f est croissante sur $I \iff f' \geqslant 0$ sur I*
- *f est déconstante sur $I \iff f' \leqslant 0$ sur I*

Démonstration :

Montrons l'équivalence pour f est croissante sur $I \iff f' \geqslant 0$ sur I

$\Rightarrow$ Supposons que f est croissante sur I. Alors :
$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I \setminus \{x_0\},\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$
Lorsque $x \to x_0$, f étant dérivable en x_0 on obtient en passant à la limite dans l'inégalité :
$$f'(x_0) \geq 0$$
$\Leftarrow$ Soient $a \leqslant b$, deux réels de I. La fonction f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, donc
$$\exists c \in]a, b[\ /\ f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \geq 0 \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$$
donc f est croissante sur I.

Remarque :

Soit f une fonction dérivable sur I.
- Si $f' > 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors la fonction f est strictement croissante.
- Si $f' < 0$ sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors la fonction f est strictement décroissante.

7.5 Convexité d'une fonction

Définition 37

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I.
On dit que f est **convexe sur I** si une des propositions suivantes (équivalentes) est vérifiée :

- la courbe de f est au-dessus de toutes ses tangentes
- la fonction f' est croissante sur I
- la fonction f'' est positive sur I

Définition 38

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I.
On dit que f est **concave sur I** si $-f$ est une fonction convexe sur I, autrement dit si une des propositions suivantes (équivalentes) est vérifiée :

- la courbe de f est en-dessous de toutes ses tangentes
- la fonction f' est décroissante sur I
- la fonction f'' est négative sur I

Remarque :

> Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et si f'' s'annule en un point x_0 en changeant de signe, alors la fonction f change de convexité au point x_0. Le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ est alors appelé un **point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$**.
> Un point d'inflexion est donc un point où la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente.

Théorème 39 ***Inégalités de convexité***

La fonction exponentielle est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et sa courbe est en particulier située au-dessus de sa tangente en 0 :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x}$$

La fonction logarithme népérien est une fonction concave sur $]0, +\infty[$ et sa courbe est en particulier située en-dessous de sa tangente en 1 :

$$\boxed{\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x - 1}$$

ou autrement dit

$$\boxed{\forall x > -1,\ \ln(1 + x) \leqslant x}$$

7.6 Développements limités

7.6.1 Développement limité en 0

Définition 40

Soit f une fonction définie au voisinage de 0.
On dit que **f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0** s'il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que au voisinage de 0 :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + o\big(x^n\big)}$$

autrement dit, $f(x)$ s'écrit localement comme la somme de :

- une fonction polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_kx^k$, appelé la **partie régulière du DL**
- une fonction négligable devant x^n : $o(x^n)$, appelé le **reste du DL**

Exemple :

Soit f la fonction définie par $\forall x \neq 1, f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Cherchons le développement limité de cette fonction au voisinage de 0.

On sait que pour tout x au voisinage de 0,on a : $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.
On peut donc écrire que, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \varepsilon(x) = \frac{x}{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

On a donc trouvé un développement limité de $\dfrac{1}{1-x}$ au voisinage de 0.

Définition 41

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est définie au voisinage de x_0, on dit que **f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0** s'il existe $b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

Théorème 42

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, alors la partie régulière de ce développement limité est unique.

7.6.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 43 ***Formule de Taylor-Young***

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et si $x_0 \in I$, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)} \iff \boxed{f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^n)}$$

Remarque :

Le plus souvent, on utilise ce théorème dans le cas particulier où $x_0 = 0$, ce qui donne :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + o(x^n)}$$

Proposition 44

Si f possède un DL d'ordre n en x_0 : $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + o((x-x_0)^n)$, alors, on a nécessairement $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a_0$.
De plus, au voisinage de x_0, f est équivalente au premier terme non nul de son développement limité : c'est-à-dire que si p est tel que pour tout $0 \leqslant k \leqslant p-1$, $a_k = 0$ et $a_p \neq 0$, alors, on a au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$$

Théorème 45 ***DL usuels <u>AU VOISINAGE DE 0</u>***

Les DL usuels suivants existent d'après le Théorème de Taylor-Young. Il faut les apprendre par coeur.

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

7.6.3 Opérations sur les DL

Proposition 46

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant chacune un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$

1. *Alors $f+g$ admet le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 suivant :*

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k + o(x^n)$$

2. *Alors fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 que l'on obtient en faisant le produit des polynômes $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.*

Exemple :

Calculer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\dfrac{e^x}{1+x}$.

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1+x} &= e^x \times \frac{1}{1+x} \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) \\ &= 1 - x + x^2 + x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\end{aligned}$$

Proposition 47

Soit $f : I \to J$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et telle que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k x^k}_{P(x)} + o(x^n)$$

Soit $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$g(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k}_{Q(x)} + o(x^n)$$

Alors $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n que l'on obtient effectuant $Q \circ P$ et en ne gardant que les termes de dégré inférieur ou égal à n.

Exemple :

Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $e^{\sqrt{x+1}}$.

$$\begin{aligned}
e^{\sqrt{x+1}} &= \exp\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)\\
&= e\times\exp\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)\\
&= e\times\left(1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\right)\\
&= e\left(1+\frac{1}{2}x+o(x^2)\right)\\
&= e+\frac{e}{2}x+o(x^2)
\end{aligned}$$

Proposition 48

Lorsqu'on veut faire le développement limité d'un quotient, on se sert d'une composée avec le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ *ou* $\dfrac{1}{1-x}$.

Exemples :

E 1 – Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1+\ln(1+x)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\ln(1+x)} &= \frac{1}{1+x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)}\\
&= 1-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)+\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\\
&= 1-x+\frac{1}{2}x^2+x^2+o(x^2)\\
&= 1-x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

E 2 – Déterminer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{1+x}} &= \frac{1}{1+1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}+o(x^3)}\\
&= \frac{1}{2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}+o(x^3)}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{1+\dfrac{x}{4}-\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{x^3}{32}+o(x^3)}\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}\right)+\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}\right)^2-\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\frac{x^3}{32}\right)^3\right)+o(x^3)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{8}-\frac{5}{64}x^3\right)+o(x^3)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{x}{8}+\frac{x^2}{16}-\frac{5}{128}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

7.6.4 Comportement local et DL

Proposition 49

Si f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0,

$$f(x) = a + b(x - x_0) + o((x - x_0))$$

alors f est dérivable en x_0 et $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.
Dans ce cas, l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc le terme $y = a + b(x - x_0)$ et pour connaître la position de la courbe par rapport à la tangente, il suffit de regarder le signe du terme suivant du développement limité.

Exemple :

Calculons le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{1+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^3\right)+o(x^3) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{x}{4}}_{\text{eq. de la tangente}} + \underbrace{\frac{x^3}{48}}_{\text{donne position de la tangente}} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Donc la courbe représentative de f admet en 0 une tangente d'équation $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}$.

De plus, on a $f(x) - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x^3}{48} + o(x^3)$, donc au voisinage de 0, la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $\dfrac{x^3}{48}$.
Pour $x < 0$, la courbe est en-dessous de la tangente, et pour $x > 0$, la courbe est au-dessus de la tangente.