CHAPITRE 3

Ensembles et applications

3.1 Théorie des ensembles

3.1.1 Définitions

Définition 1

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ des objets mathématiques. On forme alors l'**ensemble** $E = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$. On dit alors que chaque u_i (pour $1 \leqslant i \leqslant p$) est **un élément** de l'ensemble E, ou autrement dit que u_i appartient à E et on écrit "$u_i \in E$".

Remarque :

Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments. L'ordre des éléments n'est pas important. Ainsi, les ensembles :

$$\{1,2\}, \qquad \{2,1\}, \qquad \{1,1,2,2,2\}$$

sont en réalité le même ensemble au sens mathématique.

Définition 2

Le nombre d'éléments distincts d'un ensemble E est appelé le **cardinal** de E, on le note $Card(E)$. Un ensemble est **fini** si son cardinal est un entier naturel, i.e. s'il possède un nombre fini d'éléments. Dans le cas contraire, on dit qu'il est **infini**.

Exemples :

- **E 1** – $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.
- **E 2** – $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes.
- **E 3** – L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est un ensemble de cardinal 0.
- **E 4** – L'ensemble $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ est de cardinal 4.
- **E 5** – Pour tous entiers naturels m et n, on note si $m \leqslant n$: $[\![m, n]\!] = \{m, m+1, m+2, \ldots, n-1, n\}$.
  Par exemple l'ensemble $[\![1, n]\!]$ désigne l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$.

3.1.2 Parties d'un ensemble

Définition 3

Soient E et F deux ensembles. On dit que **F est inclus dans E** et on écrit "$F \subset E$" si tout élément de l'ensemble F est aussi un élément de l'ensemble E, i.e.

$$\boxed{F \subset E \iff \forall x \in F,\ x \in E}$$

Lorsque $F \subset E$, on dit que F est une **partie** ou un **sous-ensemble** de E.

Exemples :

E 1 – On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

E 2 – Lorsqu'on a un ensemble E, il est courant de considérer un sous-ensemble F des éléments de E vérifiant une certaine propriété :

$$E = \mathbb{R}, \quad F = \{x \in E \ / \ x^2 - 5x + 4 < 0\}$$

Par exemple, on note $\boxed{\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}}$, $\boxed{\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}}$, $\boxed{\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}}$.

Proposition 4

Soient E, F et G trois ensembles. Alors

1. $\emptyset \subset E$ *et* $E \subset E$.
2. ***Transitivité*** *: si $E \subset F$ et $F \subset G$, alors $E \subset G$.*
3. ***Double inclusion*** *:*

$$\boxed{E = F \qquad \iff \qquad E \subset F \text{ et } F \subset E}$$

Proposition 5

Soit E un ensemble fini et soit A un sous-ensemble de E.
Alors A est également un ensemble fini et $Card(A) \leqslant Card(E)$.
Si de plus, on a $Card(A) = Card(E)$, alors nécessairement $A = E$.

Définition 6

Pour tout ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble formé par toutes les parties de E.

Remarque :

$\mathcal{P}(E)$ est un ensemble dont chacun des éléments est un ensemble

3.1.3 Intersection et union d'ensembles

Définition 7

Soient E et F deux ensembles.

- On appelle **intersection de E et F**, notée $E \cap F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent simultanément à E et à F.
- On appelle **union de E et F**, notée $E \cup F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou à F, i.e. dans au moins un des deux ensembles.

Deux ensembles E et F vérifiant $E \cap F = \emptyset$ sont dits disjoints.

Proposition 8

La relation d'intersection est :
- ***commutative*** : $A \cap B = B \cap A$
- ***associative*** : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- *vérifie* $A \cap A = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$

La relation de réunion est :
- ***commutative*** : $A \cup B = B \cup A$
- ***associative*** : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- *vérifie* $A \cup A = A$ *et* $A \cup \emptyset = A$

L'intersection et la réunion vérifient :
- ***la distributivité de $\cap$ sur $\cup$*** : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- ***la distributivité de $\cup$ sur $\cap$*** : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Remarque :

On peut généraliser ces notations : si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles, on note :
- leur réunion $\bigcup_{i \in I} A_i$, définie par : $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I \ / \ x \in A_i$.
- leur intersection $\bigcap_{i \in I} A_i$, définie par : $x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, \ x \in A_i$.

Proposition 9 ***Formule de Poincaré***

Soient E, F deux ensembles finis. On a : $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F) - Card(E \cap F)$.
En particulier, si E et F sont disjoints, on a $Card(E \cup F) = Card(E) + Card(F)$.

Proposition 10 ***Formule du Crible***

Soient E, F et G trois ensembles finis. Alors le cardinal de $E \cup F \cup G$ est égal à

$$Card(E) + Card(F) + Card(G) - Card(E \cap F) - Card(F \cap G) - Card(E \cap G) + Card(E \cap F \cap G)$$

3.1.4 Complémentaire d'une partie

Définition 11

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **complémentaire de A dans E**, et on note $E \setminus A$, (ou ${}^cA$ ou $\overline{A}$ si aucune confusion n'est possible) l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à A :

$$E \setminus A = {}^cA = \overline{A} = \{x \in E, \ x \notin A\}$$

Proposition 12

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

1. ${}^cE = \emptyset$ *et* ${}^c\emptyset = E$
2. ${}^c({}^cA) = A, \quad ({}^cA) \cap A = \emptyset, \quad ({}^cA) \cup A = E$
3. ${}^c(A \cup B) = ({}^cA) \cap ({}^cB)$ *et* ${}^c(A \cap B) = ({}^cA) \cup ({}^cB)$

3.1.5 Produit cartésien d'ensembles

Définition 13

On appelle **produit cartésien** de n ensembles E_1, E_2, …, E_n, l'ensemble des suites finies :

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n),\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n\}$$

En particulier, lorsque les E_i sont tous identiques, on le note simplement E^n.

Exemples :

E 1 – $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ désigne l'ensemble des couples (x, y) de réels.

E 2 – La notation "$(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$" signifie que x est un réel, et que n est un entier naturel.

3.2 Applications d'un ensemble dans un autre

3.2.1 Définitions

Définition 14

Soient E et F deux ensembles.
On dit que f est une **application de E dans F** si et seulement si, à tout élément x de E est associé un et un unique élément de F noté $f(x)$, et appelé **image de x par f**. L'application f se note :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- E est appelé l'**ensemble de départ** de l'application f,
- F est appelé l'**ensemble d'arrivée** de l'application f.
- On dit qu'un élément $y \in F$ admet **un antécédent** (au moins) s'il existe un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

On note F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Exemples :

E 1 – Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$. C'est une application de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$.

E 2 – Les ensembles E et F ne sont pas forcément des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Par exemple, on peut créer une application :

$$g : \begin{array}{ccc} \{\text{élèves de 813}\} & \longrightarrow & \{\text{Villes du Monde}\} \\ Y & \longmapsto & \text{Ville de résidence de } Y \end{array}$$

Remarques :

R 1 – Dans une application, TOUS les éléments de E admettent une image dans F. Cependant, les éléments de F n'ont pas forcément tous un antécédent dans E par l'application : l'ensemble F peut être "gros" a priori.

R 2 – Deux applications f et g sont égales si et seulement si :
- elles ont le même ensemble de départ E,
- elles ont le même ensemble d'arrivée F,
- $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$

3.2.2 Restriction et prolongement d'applications

Définition 15

Soient E et F deux ensembles et soit A une partie de E.
Soit $f : E \to F$ une application de E dans F. On appelle **restriction de f à la partie A** l'application :

$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f_{|A}(x) \end{array}$$

telle que $\forall x \in A, f_{|A}(x) = f(x)$.
On a donc restreint l'ensemble de départ (au sens de l'inclusion).

Exemple :

Soit f l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^{-*},\ f(x) = \ln(-x), \qquad f(0) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = \ln(x)$$

Alors si on note g la restriction de f à $\mathbb{R}^{-*}$. On a : $g : \begin{array}{ccc}]-\infty, 0[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(-x) \end{array}$.

Définition 16

Soient E et F deux ensembles et soit E' un ensemble contenant E.
Soit $f : E \to F$ une application de E dans F. On appelle **prolongement de f à l'ensemble E'** toute application g :

$$g : \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

telle que $\forall x \in E, g(x) = f(x)$, autrement dit telle que $g_{|E} = f$.
On a donc augmenté l'ensemble de départ (au sens de l'inclusion).

Exemples :

E 1 – L'appication ln n'est définie que sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On peut par exemple la prolonger sur tout $\mathbb{R}^+$ en posant : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$.

E 2 – $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est également un prolongement de ln à $\mathbb{R}^+$.

3.2.3 Images directes et images réciproques

Définition 17

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
Soit A une partie de E. On appelle **image directe de A par l'application f** l'ensemble noté $f(A)$ défini par :

$$\boxed{f(A) = \{f(x)\ /\ x \in A\} = \{y \in F\ /\ \exists x \in A, y = f(x)\}}$$

c'est donc l'ensemble de toutes les images des éléments de A.

Définition 18

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
Soit B une partie de F. On appelle **image réciproque de B par l'application f** l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ défini par :

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}}$$

c'est donc l'ensemble de tous les antécédents possibles pour les éléments de B par l'application f.

Exemples :

E 1 – Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$. L'ensemble de départ de f est $\mathbb{R}^+$.
L'ensemble d'arrivée de f est $\mathbb{R}$.
Soit $A = [0,3]$. Quelle est l'image de la partie A par f ?

$$\forall x \in [0,3],\ 0 \leqslant x \leqslant 3 \Longleftrightarrow 1 \leqslant x+1 \leqslant 4 \Longleftrightarrow 1 \leqslant \sqrt{x+1} \leqslant 2$$

Ainsi, l'ensemble des images des éléments de $[0,3]$ est l'ensemble $[1,2]$. On a donc

$$f([0,3]) = [1,2]$$

Soit $B = [2,5]$ qui est bien une partie de $\mathbb{R}$. Quelle est l'image réciproque de la partie B par f ?

$$2 \leqslant \sqrt{x+1} \leqslant 5 \Longleftrightarrow 4 \leqslant x+1 \leqslant 25 \Longleftrightarrow 3 \leqslant x \leqslant 24$$

Donc l'ensemble des x qui ont pour image un élément de $[2,5]$ est exactement l'ensemble $[3,24]$. Donc

$$f^{-1}([2,5]) = [3,24]$$

Remarque :

Attention, on peut écrire $f(x)$: c'est l'image de l'élément x. Mais on n'écrit jamais $f^{-1}(x)$: cela ne représenterait pas l'image réciproque de l'élément x. Il faut écrire $f^{-1}(\{x\})$ pour avoir l'ensemble des antécédents possibles pour x.

3.2.4 Composition d'applications

Définition 19

Soient E, F, G trois ensembles.
Soit f une application de E dans F, et soit g une application de F dans G.
On appelle **application composée de f avec g** l'application notée $g \circ f$ définie par :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) \end{array}$$

Remarques :

R 1 – Pour que $g \circ f$ soit bien définie, l'ensemble d'arrivée de l'application f doit être inclus dans l'ensemble de départ de l'appliction g.

R 2 – Si les applications existent, on n'a pas forcément $g \circ f = f \circ g$. On dit que la loi $\circ$ n'est pas commutative.

Exemple :

Soient les applications :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-3 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

Peut-on définir $f \circ g$?
L'ensemble d'arrivée de g est $\mathbb{R}$ donc on peut bien composer par f ensuite.
On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln(x)) = 2\ln(x) - 3$$

Peut-on définir $g \circ f$?
L'application f va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc a priori, certaines images ne seront pas dans $\mathbb{R}^{+*}$. On ne peut pas écrire $g \circ f$ sur tout $\mathbb{R}$, peut-être pour certaines valeurs.

$$2x - 3 \in \mathbb{R}^{+*} \iff 2x - 3 > 0 \iff 2x > 3 \iff x > \frac{3}{2}$$

Pour tout $x > \frac{3}{2}$, on peut définir $g \circ f(x)$, et alors :

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[, \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = \ln(2x-3)$$

3.3 Nombre d'antécédants

3.3.1 Applications injectives

Définition 20

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
On dit que f est une **application injective** si tous les éléments de F admettent **au plus un antécédent**, i.e. ils en admettent un ou aucun.
Autrement dit,

$$\boxed{f \text{ injective} \iff \forall x, x' \in E, \quad \text{si } f(x) = f(x'), \quad \text{alors } x = x'}$$

Remarque :

On a également : $\boxed{f \text{ injective} \iff \forall x, x' \in E, \quad \text{si } x \neq x', \quad \text{alors } f(x) \neq f(x')}$.

3.3.2 Applications surjectives

Définition 21

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
On dit que f est une **application surjective** si tous les éléments de F admettent au moins un antécédent.
Autrement dit,

$$\boxed{f \text{ surjective} \iff \forall y \in F, \ \exists x \in E \ / \ y = f(x)}$$

Remarques :

R 1 – On a également : $\boxed{f \text{ surjective} \iff f(E) = F}$.

R 2 – Si f est une application de E dans F, f réalise toujours une surjection de E dans $f(E)$.

3.3.3 Applications bijectives

Définition 22

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
On dit que f est une **application bijective** si tous les éléments de F admettent exactement un et un seul antécédent par l'application f.
Autrement dit,

$$\boxed{f \text{ bijective } \iff \forall y \in F,\ \exists!\, x \in E \ /\ y = f(x)}$$

Remarque :

Soit $f : E \to F$ une application. Alors

$$f \text{ bijective } \quad \iff \quad \begin{cases} f \text{ injective} \\ f \text{ surjective} \end{cases}$$

Définition 23

Si f est une bijection de E sur F, alors tout élément y de F admet un et un seul antécédent dans E. On définit ainsi une application de F dans E, appelée l'application réciproque, notée f^{-1}. On a alors

$$\forall (x, y) \in E \times F, \qquad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Remarques :

R 1 – Si f est une bijection de E sur F, alors f^{-1} est une bijection de F sur E et on a :

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

R 2 – Si f est une bijection de E dans F, f est donc inversible et son application réciproque est f^{-1}, autrement dit :

$$f^{-1} \circ f = Id_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = Id_F$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in E,\ f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in F,\ f(f^{-1}(y)) = y$$

Remarque :

Si on a une application f de E dans F, alors pour tout $x \in E$ et $y \in F$, on a :

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Donc si on connaît $y = f(x)$, il suffit d'exprimer x en fonction y pour déterminer l'expression de l'application réciproque (ce qui n'est pas toujours possible...).